МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

С.Н. Кузнецова, М.В. Лукина

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

для студентов экономических специальностей

I КУРС (МОДУЛЬ 1–2)

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Санкт-Петербург

2010

С.Н. Кузнецова, М.В. Лукина. Конспект лекций для студентов экономических специальностей. I курс (модуль 1–2). Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2010. 72 с.

Пособие соответствует программе по высшей математике для студентов экономических специальностей и написано в соответствии с требованиями государственных образовательных стандартов в области математики для специалистов с высшим образованием по экономическим специальностям.

В основу положены лекции, читаемые авторами на Гуманитарном факультете СПбГУ ИТМО.

Рекомендовано к печати Ученым советом естественнонаучного факультета, 29.06.2010г., протокол № 9.

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ТЕМА I. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

МАТРИЦЫ. ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Матрица записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрицу A называют матрицей *размера* $m \times n$ и пишут $A_{m \times n}$. Числа a_{ij} составляющие матрицу, называются ее *элементами*.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется *квадратной матрицей* n*-го* *порядка*.

Элементы матрицы a_{ij}, у которых номер столбца равен номеру строки $(i = j)$, называются *диагональными* и образуют *главную диагональ* матрицы.

Матрица содержащая один столбец или одну строку, называется *вектором*. Имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}.$$

ВИДЫ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

1. Верхняя треугольная

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. Нижняя треугольная

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

3. Диагональная

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

4. Единичная

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Операция транспонирования

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строчки столбцом с тем же номером, называется матрицей <u>*транспонированной*</u> к данной. Обозначается A^T.

Транспонированная матрица обладает следующими свойствами:

1. $\left(A^T\right)^T = A$;
2. $\left(A+B\right)^T = A^T + B^T$;
3. $\left(AB\right)^T = B^T \cdot A^T$.

Линейные операции над матрицами

<u>*Суммой двух матриц*</u> $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$ и $B_{m\times n} = \left(b_{ij}\right)$ называется матрица $C_{m\times n} = \left(c_{ij}\right)$ такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $\left(i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n\right)$.

<u>*Произведением матрицы*</u> $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$ <u>*на число*</u> k называется матрица $B_{m\times n} = \left(b_{ij}\right)$ такая, что $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ $\left(i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n\right)$.

Матрица $-A = \left(-1\right)\cdot A$ называется <u>*противоположной матрице*</u> A.

Разность матриц $A - B$ можно определить как $A - B = A + \left(-B\right)$.

Пример. Вычислим линейную комбинацию $2A + B$ матриц

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$2A + B = 2\cdot\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \square$$

Операции над матрицами обладают следующими свойствами:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + \left(B + C\right) = \left(A + B\right) + C$;
3. $A + O = A$;
4. $A - A = O$;
5. $1\cdot A = A$;
6. $\alpha\cdot\left(A + B\right) = \alpha\cdot A + \alpha\cdot B$;
7. $\left(\alpha + \beta\right)\cdot A = \alpha\cdot A + \beta\cdot A$;
8. $\alpha\cdot\left(\beta A\right) = \left(\alpha\beta\right)\cdot A$,

где A, B, C – матрицы, α, β – числа.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦ

Замечание: если свойство справедливо и для строк и для столбцов будем в формулировках называть их рядами.

Элементарными преобразованиями матриц являются:

- перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;
- умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;
- прибавление ко всем элементам ряда соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Две матрицы A и B называются *эквивалентными*, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается $A \sim B$.

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Произведением матрицы $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$ *на матрицу* $B_{n\times p} = \left(b_{jk}\right)$ называется матрица $C_{m\times p} = \left(c_{ik}\right)$ такая, что $c_{ik} = a_{i1}\cdot b_{1k} + a_{i2}\cdot b_{2k} + \ldots + a_{in}\cdot b_{nk}$, где $i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n,\ k = 1,\ldots,p$.

Пример. Найдем произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение: для заданных матриц определено только произведение $A\cdot B$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -6 & -1 \\ -26 & 14 \end{pmatrix}. \ \square$$

Если матрицы A и B квадратные одного размера, то произведения $A\cdot B$ и $B\cdot A$ всегда существуют. Легко показать, что $A\cdot E = E\cdot A = A$, где A – квадратная матрица, E – единичная матрица того же размера.

Матрицы A и B называются *перестановочными*, если $A\cdot B = B\cdot A$.

Пример. Матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ перестановочны:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 18 \end{pmatrix} \text{ и } B\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}. \ \square$$

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1. $A\left(BC\right) = \left(AB\right)C$;

2. $A(B+C)=AB+AC$;

3. $(A+B)C=AC+BC$;

4. $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$.

Целой положительной степенью $A^m \ (m>1)$ квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A, т.е. $A^m = \underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{m\text{ раз}}$.

Пример. Вычислим куб матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 24 & 32 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}.\ \square$$

Справедливы следующие свойства:

1. $A^0=E$;
2. $A^1=A$;
3. $A^m A^k = A^{m+k}$;
4. $\left(A^m\right)^k = A^{mk}, \qquad m, k \in \mathrm{N}.$

Из равенства $A^m=O$ не следует, что $A=O$.

Определители

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число $\det A$ (или $|A|$, или Δ), называемое ее <u>*определителем*</u>, следующим образом:

1. $n=1$. $A=(a_1);\det A = a_1$.

2. $n=2$. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$.

3. $n=3$. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; $\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$

$$=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}-a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}-a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}-a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}$$
.

Это правило треугольника, или правило Сарруса.

Схема вычисления определителя второго порядка:

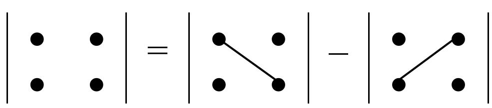
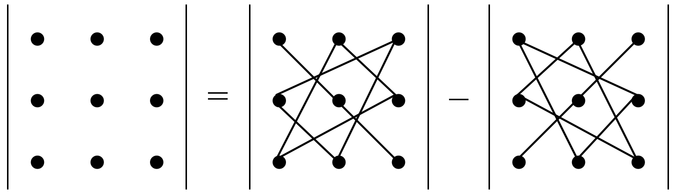


Схема вычисления определителя третьего порядка:



Пример. Вычислим определители матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 5 \cdot 6 = -28.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 5 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 0 - 5 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = -15. \;\square$$

Определитель квадратной матрицы n- го порядка вычисляется с использованием свойств определителей.

Основные свойства определителей

1. «Равноправность строк и столбцов». Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами и наоборот ($\det A = \det A^T$).
2. При перестановке двух соседних рядов определитель меняет знак.
3. Если в определителе строка или столбец состоит из нулей, то определитель равен нулю.
4. Определитель, имеющий два равных ряда, равен нулю.
5. Общий множитель элементов какого-либо ряда можно вынести за знак определителя.

Из свойств 3 и 4 следует, что если все элементы какого-либо ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю.

6. «Элементарные преобразования определителя». Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число.
7. Определитель диагональной и треугольной матриц равен произведению диагональных элементов.

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $n-1$-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания i-ой строки и j-го столбца. Обозначается m_{ij}.

Так, если $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, то $m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $m_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Обозначается A_{ij}: $A_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$.

Так, $A_{11} = +m_{11}$, $A_{32} = -m_{32}$.

Теорема I.1 (Теорема Лапласа) определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения: $\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj}$.

Доказательство:

Проведем доказательство для случая матрицы 3-го порядка. В этом случае формула запишется так $\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$. Подставим алгебраические дополнения и получим

$$a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13} \cdot (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}) =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} +$$

$$+ a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} = \Delta$$

Обратная матрица

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю: $\Delta = \det A \neq 0$. В противном случае матрица называется вырожденной.

Матрицей, *союзной к матрице* A, называется матрица

$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} данной матрицы A.

Матрица A^{-1} называется *обратной матрице* A, если выполняется условие $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Теорема I.2. Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

Доказательство:

Проведем доказательство для случая матрицы 2-го порядка. Пусть

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \det A \neq 0$.

Составим союзную матрицу

$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$ и найдем произведение матриц A и A^*:

$$A \cdot A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix}=\det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\det A \cdot E$$

т.е. $A \cdot A^*=\det A \cdot E \Rightarrow A \cdot \dfrac{A^*}{\det A}=E$.

Аналогично убедимся, что $A^* \cdot A=\det A \cdot E \Rightarrow \dfrac{A^*}{\det A} \cdot A=E$.

Сравнивая полученные равенства с определением, получаем

$A^{-1}=\dfrac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$. ❐

Доказательство теоремы дает алгоритм вычисления обратной матрицы:

- Находим определитель исходной матрицы. Если $|A|=0$, то матрица вырожденная и A^{-1} не существует. Если $|A|\neq 0$, то матрица невырожденная и A^{-1} существует.
- Находим матрицу состоящую из алгебраических дополнений.
- Транспонируем ее и получаем союзную матрицу.
- Каждый элемент этой матрицы делим на определитель.

Пример. Найдем матрицу, обратную к $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение: находим определитель матрицы $|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=5\neq 0$.

Строим алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}=1;\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}=3;\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}=-3;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}=1;\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}=1;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{vmatrix}=-2;\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{vmatrix}=3.$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0,2 & 0,6 & -0,4\\-0,6 & 0,2 & 0,2\\0,2 & -0,4 & 0,6\end{pmatrix}. \ ❒$$

Отметим свойства обратной матрицы:

1. $\det\left(A^{-1}\right)=\dfrac{1}{\det A}$;
2. $\left(A\cdot B\right)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$;
3. $\left(A^{-1}\right)^{T}=\left(A^{T}\right)^{-1}$.

Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу A размера $m\times n$. Выделим в ней k строк и k столбцов ($k\le\min(m;n)$). Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k-го порядка. Все такие определители называются *минорами этой матрицы*.

Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется *рангом матрицы*. Обозначается $r, r(A), \operatorname{rang} A$.

Из определения следует:

- ранг матрицы не превосходит меньшего из ее размеров, т.е. $r\le\min(m;n)$;
- $r(A)=0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю, т.е. $A=O$;
- для квадратной матрицы n-го порядка $r(A)=n$ тогда и только тогда, когда матрица A — невырожденная.

Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется *базисным*. У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Отметим *свойства ранга* матрицы:

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.
2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.
3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

Пример. Определим ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & -1 & -6\\ 1 & 1 & 2 & 5\end{pmatrix}$.

Решение: с помощью элементарных преобразований приведем матрицу к диагональному виду

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & -1 & -6\\ 1 & 1 & 2 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & -3 & -2 & -9\\ 0 & -1 & 1 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -3\end{pmatrix}.$$

Три первых столбца образуют базисный минор $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1$.

Это определитель 3-го порядка, поэтому $r(A)=3$. ❐

Линейная независимость рядов матрицы

Понятие ранга матрицы тесно связано с понятием линейной независимости ее строк или столбцов.

Рассмотрим матрицу

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

В матрице A обозначим ее строки:

$e_1=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\end{pmatrix}$

$e_2=\begin{pmatrix}a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\end{pmatrix}$

…………

$e_m=\begin{pmatrix}a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$

Строка e называется *линейной комбинацией* строк $e_1,e_2,\dots,e_m$, если $e=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\dots+\lambda_me_m$, где $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$ — целые числа.

Строки матрицы $e_1,e_2,\dots,e_m$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация строк равна нулевой строке $\mathbf{0}=(0,0,\dots,0)$.

$\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\dots+\lambda_me_m=\mathbf{0}$.

Теорема I.3 Линейная зависимость строк матрицы означает, что хотя бы одна строка матрицы является линейной комбинацией остальных.

Доказательство:

Пусть для определенности $\lambda_m \neq 0$, тогда

$$e_m = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)e_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_m}\right)e_2 + \ldots + \left(-\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)e_{m-1}. \ \square$$

Если линейная комбинация строк равна нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты равны нулю, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$, то строки $e_1, e_2, \ldots, e_m$ называются *линейно независимыми*.

Теорема I.4 (о ранге матрицы) Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк, через которые линейно выражаются все остальные ее строки.

Доказательство:

Пусть матрица A размера $m \times n$ имеет ранг r. Это означает, что существует отличный от нуля минор r-го порядка. Пусть для определенности это

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Докажем, что строки $e_1, e_2, \ldots, e_r$ линейно независимы. Предположим противное, что $e_r = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_{r-1} e_{r-1}$. Вычтем из нее первую строку умноженную на λ_1, вторую на λ_2 и т.д. На основании свойств определителя при этом определитель не изменится. С другой стороны определитель, содержащий нулевую строку равен нулю. Предположение неверно. Строки $e_1, e_2, \ldots, e_r$ линейно независимы.

Покажем, что любые $(r+1)$ строк линейно зависимы, т.е. любая строка выражается через $e_1, e_2, \ldots, e_r$. Рассмотрим минор $(r+1)$-го порядка, добавив i-ю строку и j-й столбец:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & a_{2j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}$$

Этот минор равен нулю, т.к. ранг равен r. Разложим его по последнему столбцу $a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{rj}A_{rj} + a_{ij}A_{ij} = 0$. Алгебраическое дополнение $A_{ij} \neq 0$, т.к. совпадает с базисным минором. Разделив на него равенство выразим a_{ij} через остальные

$$a_{ij} = a_{1j}\left(-\frac{A_{1j}}{A_{ij}}\right) + a_{2j}\left(-\frac{A_{2j}}{A_{ij}}\right) + \ldots + a_{rj}\left(-\frac{A_{rj}}{A_{ij}}\right).$$

Получили, что каждый элемент i-ой строки выражается через элементы строк $e_1, e_2, \ldots, e_r$, т.е. i-ая строка есть линейная комбинация строк $e_1, e_2, \ldots, e_r$. ❒

Строки $e_1, e_2, \ldots, e_r$ будем называть *базисными*.

Пример. Найдем максимальное число линейно независимых строк матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$.

Решение: определим ранг матрицы, используя элементарные преобразования.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. $r(A) = 2$. Матрица содержит две линейно независимые строки. ❒

ТЕМА II. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными записывается в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где через a_{ij} обозначен коэффициент при неизвестном x_j в i-м уравнении системы; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные; числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ называются *свободными членами*.

Таблица коэффициентов при неизвестных называется *матрицей системы*:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$, столбец $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – *столбцом неизвестных*,

а столбец $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ – *столбцом свободных членов.*

Если $m=n$, то определитель матрицы A чаще всего обозначается Δ и называется *определителем системы*.

Решение системы – множество чисел x_1, x_2,…, x_n таких, что при подстановке их в уравнения системы каждое уравнение обращается в тождество.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решение.

Две системы называются *эквивалентными (равносильными)*, если они имеют одно и то же общее решение.

Эквивалентные системы получаются, в частности, при элементарных преобразованиях строк матрицы.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все свободные члены равны нулю. Однородная система всегда совместна, т.к. $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ является решением системы.

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Матричный метод

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$, или в матричном виде $A\cdot X=B$.

Если определитель системы отличен от нуля, то система называется *невырожденной*.

Умножив обе части уравнения $A\cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$. Поскольку $A^{-1}\cdot A = E$ и $E\cdot X = X$, то $X = A^{-1}\cdot B$.

Пример. Решим систему $\begin{cases} x + y + 4z = 1 \\ 2x + y + 6z = 2 \\ 3x + 3y + 13z = 2 \end{cases}$.

Решение: обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 13 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Т.к. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 13 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, значит обратная матрица существует

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 8 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $X = A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 8 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. ❐

Формулы Крамера

Матричное решение запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\Delta}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .$$

$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n}{\Delta}$$

Но $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n$ есть разложение определителя $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ по элементам первого столбца. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов. Аналогично получаем формулы для остальных неизвестных. Формулы

$x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1, \ldots, n$ называются формулами Крамера.

Пример. Решим систему $\begin{cases} 2x & -3y & +z & = 0 \\ x & +2y & -z & = 3 \\ 3x & +5y & & = 3 \end{cases}.$

Решение: определитель системы $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$.

Вычислим определители для неизвестных $\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 18$,

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -36$.

Теперь, по формулам Крамера: $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{18}{18} = 1$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{0}{18} = 0$, $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = \dfrac{-36}{18} = -2$. ❐

Метод Гаусса

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решения линейных алгебраических систем является метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении переменных.

Пусть дана произвольная система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (<u>*прямой ход*</u>) система приводится к <u>*ступенчатому*</u> (в частности, <u>*треугольному*</u>) виду.

Будем считать, что элемент $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то первым в системе запишем уравнение, в котором коэффициент при x_1 отличен от нуля).

Преобразуем систему, исключив неизвестное x_1 во всех уравнениях, кроме первого. Для этого умножим обе части первого уравнения на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и сложим почленно со вторым уравнением системы. Затем умножим обе части первого уравнения на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ и сложим почленно с третьим уравнением системы. Продолжая этот процесс, получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2k}^{(1)}x_k + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mk}^{(1)}x_k + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)} \end{cases}$$

Аналогичным образом, считая главным элементом $a_{22}^{(1)} \neq 0$, исключим неизвестное x_2 из всех уравнений системы, кроме первого и второго, и так далее. Продолжаем этот процесс, пока это возможно.

После каждого шага число уравнений может уменьшиться, если какое-либо уравнение является линейной комбинацией других уравнений.

После последнего шага мы можем придти к одной из следующих ситуаций:

I Число неизвестных совпадает с числом уравнений, и матрица системы приведена к треугольному виду $(a_{nn} \neq 0)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{*}x_2 + \ldots + a_{2k}^{*}x_k + \ldots + a_{2n}^{*}x_n = b_2^{*} \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}^{*}x_n = b_n^{*} \end{cases}$$

Теперь можно из последнего уравнения выразить $x_n = \dfrac{b_n^*}{a_{nn}^*}$, подставить найденное x_n в предыдущее уравнение, найти x_{n-1} и далее <u>*обратным ходом*</u> к первому уравнению. В этом случае $r(A) = r(A|B) = n$, а система имеет единственное решение.

II Число неизвестных меньше числа уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^*x_2 + \ldots + a_{2k}^*x_k + \ldots + a_{2n}^*x_n = b_2^* \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{nk}^*x_k + \ldots + a_{nn}^*x_n = b_n^* \ , \ b_{n+1}^*, b_{n+2}^*, \ldots, b_r^* \neq 0 \\ \qquad\qquad 0 \cdot x_k + \ldots + 0 \cdot x_n = b_{n+1}^* \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad 0 \cdot x_k + \ldots + 0 \cdot x_n = b_r^* \end{cases}$$

В этом случае $r(A) < r(A|B)$, тогда некоторые уравнения системы противоречат остальным, т.е. система несовместна.

III Число уравнений меньше числа неизвестных

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^*x_2 + \ldots + a_{2k}^*x_k + \ldots + a_{2n}^*x_n = b_2^* \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{kk}^*x_k + \ldots + a_{kn}^*x_n = b_k^* \end{cases}$$

Выберем неизвестные соответствующие базисному минору $x_1, \ldots, x_r$ и будем считать их главными, а остальные неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ примем за параметры, т.е. будем считать, что они принимают любые значения. Тогда

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \qquad a_{22}^*x_2 + \ldots + a_{2r}^*x_r = b_2^* - a_{2r+1}^*x_{r+1} - \ldots - a_{2n}^*x_n \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{rr}^*x_r = b_r^* - a_{rr+1}^*x_{r+1} - \ldots - a_{rn}^*x_n \end{cases}$$

Система имеет бесконечное множество решений. В этом случае $r(A) = r(A|B) < n$.

Обобщим полученные результаты в теореме Кронекера-Капелли.

Теорема II.1 Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы.

Системы линейных однородных уравнений

Система уравнений называется <u>*однородной*</u>, если все ее свободные члены $b_1, b_2, \ldots, b_m$ равны нулю.

Пусть дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Свойства однородной системы:

1. Однородная система всегда совместна т.к., она имеет нулевое (тривиальное) решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.
2. Если X и Y два решения однородной системы, то линейная комбинация этих решений $\lambda X + \mu Y$ также является решением системы.
3. Если система имеет хотя бы одно не нулевое решение, то она имеет бесконечно много решений.

Теорема II.2 Для того, чтобы система однородных уравнений имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг r ее основной матрицы был меньше числа неизвестных, т.е. $r < n$.

Необходимость

Очевидно $r \le n$. Пусть $r = n$. Тогда один из миноров размера $n \times n$ отличен от нуля. Поэтому система имеет единственное решение: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta} = 0,\ \Delta_i = 0,\ \Delta \ne 0$. Значит, других, кроме тривиальных, решений нет. Итак, если есть нетривиальное решение, то $r < n$.

Достаточность

Пусть $r < n$. Тогда однородная система, будучи совместной, является неопределенной. Значит, она имеет бесчисленное множество решений, т.е. имеет и ненулевые решения. ❒

Совокупность решений $X_1, X_2, \ldots, X_k$ однородной системы называется <u>*фундаментальной системой решений*</u>, если

1. $X_1, X_2, \ldots, X_k$ линейно независимы
2. любое решение системы X представимо в виде линейной комбинации $X = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_k X_k$

Пусть $r < n$, тогда $x_1, \ldots, x_r$ – главные переменные, а $x_{r+1}, \ldots, x_n$ – свободные переменные. Будем последовательно полагать одно из значений свободной переменной равным 1, а остальных – равным 0. При этом значения главных переменных можно рассчитать.

$$X_1=\begin{pmatrix} x_1(1,0,\ldots,0) \\ \vdots \\ x_r(1,0,\ldots,0) \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix} x_1(0,1,\ldots,0) \\ \vdots \\ x_r(0,1,\ldots,0) \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \ldots,\ X_{n-r}=\begin{pmatrix} x_1(0,0,\ldots,1) \\ \vdots \\ x_r(0,0,\ldots,1) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эти решения образуют <u>*фундаментальную систему решений*</u> однородной системы.

Общее решение однородной системы можно записать в виде $X=\alpha_1X_1+\ldots+\alpha_{n-r}X_{n-r}$.

Пример. Решим систему $\begin{cases} x_1 & -2x_2 & -x_3 & -x_4 & =0 \\ 2x_1 & -4x_2 & +5x_3 & +3x_4 & =0 \\ x_1 & -2x_2 & +13x_3 & +9x_4 & =0 \end{cases}$.

Решение: преобразуем матрицу системы

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 13 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 17 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

$r(A)=r(A|B)=2<n=4$. Главные неизвестные выбираем по базисному минору $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$: x_1,x_4, свободными неизвестными будут x_2,x_3.

Положим $x_2=1,\ x_3=0$, тогда $x_1=2,\ x_4=0$.

Положим $x_2=0,\ x_3=1$, тогда $x_1=2{,}4;\ x_4=1{,}4$.

Фундаментальная система решений имеет вид $X_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix} 2{,}4 \\ 0 \\ 1 \\ 1{,}4 \end{pmatrix}$.

В результате получим решение системы $X=c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 2{,}4 \\ 0 \\ 1 \\ 1{,}4 \end{pmatrix}$. ❒

Неоднородные системы линейных уравнений

Рассмотрим произвольную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

<u>Соответствующей ей однородной системой</u> будем называть систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Свойства неоднородной системы:

1. Если Y решение неоднородной системы, а X решение соответствующей однородной системы, то $Z = Y + X$ решение неоднородной системы.
2. Если Y и Z решение неоднородной системы, то $X = Z - Y$ решение соответствующей однородной системы.
3. Любое решение Z неоднородной системы представимо в виде суммы $Z = Y + X$, где Y частное решение неоднородной системы, а X общее решение соответствующей однородной системы.
4. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ фундаментальная система решений однородной системы, а Y частное решение неоднородной системы, тогда множество решений неоднородной системы представимо в виде $Z = Y + c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_{n-r}X_{n-r}$. Это выражение называется *<u>общим решением системы</u>*.

Пример. Решим систему $\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & -3x_4 & +x_5 & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & -x_5 & = 2 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & +x_5 & = 14 \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & -4x_4 & +2x_5 & = 14 \end{cases}$.

Решение: преобразуем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 14 \\ 2 & -3 & 2 & -4 & 2 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & -3 & -68 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A|B) = 3 < n = 5$. Главные неизвестные выбираем по базисному минору x_1, x_2, x_3, свободным неизвестным придадим значения $x_4 = c_1, x_5 = c_2$.

В результате получим решение системы

$$\begin{cases} x_1 = -0,25c_1 - 0,25c_2 + 11 \\ x_2 = -2c_1 + 14 \\ x_3 = -0,75c_1 - 0,75c_2 + 17 \\ x_4 = c_1 \\ x_5 = c_2 \end{cases} \text{ или } \; X = c_1 \begin{pmatrix} -0,25 \\ -2 \\ -0,75 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -0,25 \\ 0 \\ -0,75 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 17 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \; ❐$$

Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

Макроэкономика функционирования многоотраслевого хозяйства требует баланса между отдельными отраслями. Каждая отрасль, с одной стороны, является производителем, а с другой — потребителем продукции других отраслей.

Возникает довольно непростая задача расчета связи между отраслями через выпуск и потребление продукции разного рода.

Впервые эта проблема была сформулирована в 1936 г. в виде *математической модели* «затраты–выпуск» в трудах американского экономиста В.Леонтьева, который попытался проанализировать причины экономической депрессии в США 1929–1932 г.г.

В 1973 г. за разработку метода «затраты–выпуск» и его применение при решении важнейших экономических задач Леонтьеву была присуждена Нобелевская премия.

Эта модель основана на алгебре матриц и использует аппарат матричного анализа.

Балансовые соотношения

Для простоты будем полагать, что производственная сфера состоит из n отраслей, каждая из которых производит свой продукт. Для обеспечения своего производства каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей. Обычно процесс производства рассматривается за некоторый период (например, год).

Введем обозначения:

x_i — общий объем продукции i-ой отрасли

x_{ij} — объем продукции i-ой отрасли, потребляемый j-ой отраслью

y_i — объем продукции i-ой отрасли, предназначенный для реализации

Ц е л ь   б а л а н с о в о г о   а н а л и з а — ответить на вопрос: каким должен быть объем производства каждой из n отраслей, чтобы удовлетворить все потребности в продукции этой отрасли?

Балансовый принцип связи различных отраслей промышленности состоит в том, что валовый выпуск i-ой отрасли должен быть равен сумме объемов потребления в производственной и непроизводственной сферах. В самой простой форме (гипотеза линейности) балансовые соотношения имеют вид

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + y_i,\ i = 1,\ldots,n$$

Эти уравнения называются *соотношениями баланса*. Мы будем рассматривать стоимостный межотраслевой баланс.

Линейная модель многоотраслевой экономики

Леонтьевым на основании анализа экономики США в период перед второй мировой войной был установлен важный факт: в течении длительного времени величины $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ меняются очень слабо и могут рассматриваться как постоянные числа.

В силу указанного факта можно сделать следующие допущения: для производства продукции i-ой отрасли объемом x_i нужно использовать продукцию j-ой отрасли объемом $a_{ij}x_j$, где a_{ij} — постоянное число.

При таком допущении технология производства принимается *линейной*, а само это допущение называется *гипотезой линейности*. При этом числа a_{ij} называются *коэффициентами прямых затрат*.

Поскольку $x_{ij} = a_{ij}x_j$, балансовые соотношения можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n \end{cases}$$

Введем в рассмотрение:

вектор–столбец объемов произведенной продукции $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$

вектор–столбец объемов продукции конечного потребления $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$

матрицу коэффициентов *прямых затрат* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Система уравнений в матричном виде имеет вид $X = AX + Y$. Это соотношение называется *уравнением линейного межотраслевого баланса*. Вместе с описанием матриц это уравнение носит название *модели Леонтьева*.

Это уравнение можно использовать в двух целях;

1. Если известен X, требуется рассчитать Y;
2. Для целей планирования: для некоторого периода времени известен Y и требуется определить X.

Продуктивные модели Леонтьева

Система уравнений имеет ряд особенностей, вытекающих из характера данной задачи: все элементы матрицы и векторов должны быть неотрицательными.

Матрица A, все элементы которой неотрицательны, называется *продуктивной*, если для любого вектора Y с неотрицательными компонентами существует решение уравнения $X = AX + Y$, все элементы, которого неотрицательны.

В этом случае и модель Леонтьева называется *продуктивной*.

Для решения уравнения $X = AX + Y$ разработана соответствующая математическая теория исследования решения и его особенностей.

Перепишем его в виде $(E - A)X = Y$. Если $(E - A)$ невырожденная, т.е. $|E - A| \neq 0$, то существует обратная матрица $(E - A)^{-1}$, значит существует и единственное решение:

$X = (E - A)^{-1} Y$.

Матрица $S = (E - A)^{-1}$ называется *матрицей полных затрат*.

Выясним экономический смысл матрицы полных затрат $S = (s_{ij})$. Рассмотрим единичные векторы конечного продукта: $y_1 = (1,0,\dots,0,0),\dots,y_n = (0,0,\dots,0,1)$. Для них получаем соответствующие векторы валового выпуска: $x_1 = (s_{11}, s_{21}, \dots, s_{n1}),\dots,x_n = (s_{1n}, s_{2n}, \dots, s_{nn})$. Следовательно, каждый элемент матрицы полных затрат есть величина валового выпуска продукции i-ой отрасли, необходимого для обеспечения выпуска единицы конечного продукта j-й отрасли.

Существует несколько критериев продуктивности матрицы A:

1. A продуктивна тогда и только тогда, когда существует $(E-A)^{-1}$ и ее элементы неотрицательны.
2. A с неотрицательными элементами продуктивна, если сумма элементов по любому ее столбцу не превосходит единицы: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \le 1$, причем, хотя бы для одного столбца эта сумма, строго меньше единицы.

ТЕМА III. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Основные понятия

Вектор это отрезок, имеющий длину и направление.

Если $A-$ начало вектора, а $B-$ его конец, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$. *Длинной* или *модулем* вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Вектор $\overrightarrow{BA}$ называется *противоположным* вектору $\overrightarrow{AB}$. Вектор противоположный $\vec{a}$ обозначается $-\vec{a}$.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* вектором и обозначается $\vec{e}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется *ортом* вектора $\vec{a}$ и обозначается $\overrightarrow{a^0}$. Очевидно, что $\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cdot\overrightarrow{a^0}$ ($\overrightarrow{a^0}=\frac{1}{\left|\vec{a}\right|}\cdot\vec{a}$).

Линейные операции над векторами: *сумма*, *разность*, *умножение на число* были введены в школе.

Линейная зависимость и независимость векторов. Базис.

Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ называется вектор $\vec{a}$, определяемый по формуле $\vec{a}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{a}_i=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n$, где λ_i – некоторые числа $(i=1,2\ldots n)$.

Будем говорить, что вектор $\vec{b}$ *разлагается (линейно выражается)* по векторам $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$, если он равен некоторой линейной комбинации векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$: $\vec{b}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{a}_i$. Числа λ_i называются *коэффициентами разложения* вектора $\vec{b}$ по системе $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$.

Если для системы n векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ равенство $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{a}_i=\vec{0}$ верно только при $\lambda_i=0\left(i=1,\ldots,n\right)$, то эта система называется *линейно независимой*.

Пример. Выясним линейную зависимость или независимость векторов $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(2;-1;1)$, $\vec{c}=(1;3;4)$.

Решение. Линейную комбинацию $\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}$ приравняем к нулю $\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Решим относительно $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ (если $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, то векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ - линейно независимы). Запишем в виде системы уравнений $\begin{cases}\lambda_1 & +2\lambda_2 & +\lambda_3 & =0\\ 2\lambda_1 & -\lambda_2 & +3\lambda_3 & =0\\ 3\lambda_1 & +\lambda_2 & +4\lambda_3 & =0\end{cases}$.

Преобразуем матрицу системы $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&-1&3\\3&1&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-5&1\\0&-5&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-5&1\end{pmatrix}$.

$r(A)=2<n=3$. Система имеет бесконечное множество решений, значит векторы линейно зависимы. ❐

Если ни один из векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ нельзя представить в виде линейной комбинации остальных, то векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ называются <u>*линейно независимыми*</u>.

Замечание 1. Можно доказать, что эти два определения эквивалентны.

Совокупность любых трех линейно независимых векторов $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ в трехмерном пространстве называется <u>*базисом в пространстве*</u>.

Если $\vec{a}$ произвольный вектор, то всегда можно найти единственным образом числа x_1,x_2,x_3 такие, что $\vec{a}=x_1\vec{e_1}+x_2\vec{e_2}+x_3\vec{e_3}$. Числа x_1,x_2,x_3 называются <u>*координатами вектора*</u> $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$.

Пример. Разложим вектор $\vec{x}=(-2;3;1)$ по базису векторов $\vec{e}_1=(1;2;-1)$, $\vec{e}_2=(-2;0;3)$, $\vec{e}_3=(-1;1;-1)$.

Решение. Запишем вектор $\vec{x}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$: $x_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$. Решим систему уравнений $\begin{cases}x_1 & -2x_2 & -x_3 & =-2\\ 2x_1 & & +x_3 & =3\\ -x_1 & +3x_2 & -x_3 & =1\end{cases}$. Преобразуем матрицу системы

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & \vline & -2 \\ 2 & 0 & 1 & \vline & 3 \\ -1 & 3 & -1 & \vline & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & \vline & -2 \\ 0 & 4 & 3 & \vline & 7 \\ 0 & 1 & -2 & \vline & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & \vline & -2 \\ 0 & 1 & -2 & \vline & -1 \\ 0 & 0 & 11 & \vline & 11 \end{pmatrix}.$$ Система имеет единственное решение $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$. Вектор $\vec{x}_{\vec{e}} = (1;1;1)$. ❒

Из всех возможных базисов в пространстве выберем такой, чтобы все векторы, входящие в этот базис, были попарно ортогональны $\left(\vec{e_i}, \vec{e_j}\right) = \frac{\pi}{2}, (i, j = 1,2,3)$. Далее разделим каждый вектор базиса на его длину, получим базис $\overrightarrow{e_1^0}, \overrightarrow{e_2^0}, \overrightarrow{e_3^0}$. Такой базис <u>*называется ортонормированным*</u>.

Поместим начало векторов в общую точку O и из этой точки проведем оси Ox, Oy, Oz, направленные по векторам $\overrightarrow{e_1^0}, \overrightarrow{e_2^0}, \overrightarrow{e_3^0}$. Получим так называемую пространственную <u>*прямоугольную декартову систему координат*</u> $Oxyz$. Причем орты принято обозначать $\overrightarrow{e_1^0} = \vec{i}, \overrightarrow{e_2^0} = \vec{j}, \overrightarrow{e_3^0} = \vec{k}$.

Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана ось l, т.е. направленная прямая.

<u>*Проекцией точки*</u> M на ось l называется основание M_1 перпендикуляра MM_1, опущенного из точки на ось. Если точка M лежит на оси l, то проекция точки M на ось совпадает с M.

Пусть $\overrightarrow{AB}$ – произвольный вектор. Обозначим через A_1 и B_1 проекции на ось l точек A и B соответственно и рассмотрим вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$.

<u>*Проекцией вектора*</u> $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется положительное число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l одинаково направлены и отрицательное число $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l противоположно направлены. Если точки A_1 и B_1 совпадают, то проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ равна *0*.

Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l обозначается $\text{пр}_l \overrightarrow{AB}$. Если $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ или $\overrightarrow{AB} \perp l$, то $\text{пр}_l \overrightarrow{AB} = 0$.

Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна произведению модуля вектора $\vec{a}$ на косинус угла φ между вектором и осью, т.е. $\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$.

Разложение вектора по ортам координатных осей

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$.

Выберем произвольный вектор $\vec{a}$ пространства и совместим его с началом координат: $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$. Найдем проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси: $\text{пр}_x \vec{a} = \left|\overrightarrow{OM_1}\right|$, $\text{пр}_y \vec{a} = \left|\overrightarrow{OM_2}\right|$, $\text{пр}_z \vec{a} = \left|\overrightarrow{OM_3}\right|$.

По определению суммы векторов находим $\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$.

Но $\overrightarrow{OM_1} = \left|\overrightarrow{OM_1}\right| \cdot \vec{i}$, $\overrightarrow{OM_2} = \left|\overrightarrow{OM_2}\right| \cdot \vec{j}$, $\overrightarrow{OM_3} = \left|\overrightarrow{OM_3}\right| \cdot \vec{k}$. Обозначив проекции вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ на оси Ox, Oy и Oz соответственно через a_x, a_y и a_z, получим $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$

Т.о. любой вектор трехмерного пространства можно разложить по векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. При этом сами векторы имеют разложения $\vec{i}\left(1,0,0\right)$, $\vec{j}\left(0,1,0\right)$, $\vec{k}\left(0,0,1\right)$.

На основании теоремы о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда можно написать:
$\left|\overrightarrow{OM}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OM_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_2}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_3}\right|^2$, т.е. $\left|\vec{a}\right|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ или $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Пусть углы вектора $\vec{a}$ с осями Ox, Oy и Oz соответственно равны α, β, γ. По свойству проекции вектора на ось, имеем $a_x = \left|\vec{a}\right| \cos\alpha, a_y = \left|\vec{a}\right| \cos\beta, a_z = \left|\vec{a}\right| \cos\gamma$ или

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|}, \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|}$$

Числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются *<u>направляющими косинусами</u>* вектора $\vec{a}$.

Подставив выражения

$a_x = \left|\vec{a}\right| \cos\alpha, a_y = \left|\vec{a}\right| \cos\beta, a_z = \left|\vec{a}\right| \cos\gamma$ в равенство

$\left|\vec{a}\right|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ и сократив его на $\left|\vec{a}\right|^2 \neq 0$ получим соотношение $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Действия над векторами, заданными координатами и координаты вектора через координаты конца и начала известны из школьного курса.

Скалярное произведение векторов и его свойства

<u>Скалярным произведением</u> двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется *<u>число</u>*, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Обозначается $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi, \quad \varphi = \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$$

Свойства скалярного произведения

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;
2. $\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$; $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;
3. $\vec{a}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|^2$ или $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}}$;
4. $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$;
5. Выражение скалярного произведения через координаты

Найдем скалярное произведение векторов, перемножая их как многочлены

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=$$

$$=a_xb_x\vec{i}\,\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\,\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\,\vec{k}+$$

$$a_yb_x\vec{j}\,\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\,\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\,\vec{k}+$$

$$a_zb_x\vec{k}\,\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\,\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\,\vec{k}=$$

принимая во внимание, что

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

$=a_xb_x+0+0+0+a_yb_y+0+0+0+a_zb_z$. Окончательно получим: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

6. Угол между векторами $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$;
7. Проекция вектора на заданное направление $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$

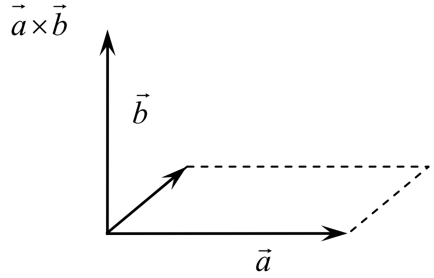
Векторное произведение векторов и его свойства

Три некомпланарных (не лежащих в одной плоскости) вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют *правую тройку*, если с конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и *левую*, если по часовой.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется *вектор* $\vec{a}\times\vec{b}$, который:

- перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$, $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$;

- имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах, т.е. $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$;
- векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$ образуют правую тройку.
- Обозначается $\vec{a}\times\vec{b}$, $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.



Из определения вытекают следующие соотношения $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}, \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}, \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

Свойства векторного произведения

1. $\vec{a}\times\vec{b} = -\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$;
2. $\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = (\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)$;
3. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}$;
4. $\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = 0$;
5. Выражение векторного произведения через координаты

Найдем векторное произведение векторов

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=$$

$$=a_xb_x\left(\vec{i}\times\vec{i}\right)+a_xb_y\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)+a_xb_z\left(\vec{i}\times\vec{k}\right)+$$

$$a_yb_x\left(\vec{j}\times\vec{i}\right)+a_yb_y\left(\vec{j}\times\vec{j}\right)+a_yb_z\left(\vec{j}\times\vec{k}\right)+$$

$$a_zb_x\left(\vec{k}\times\vec{i}\right)+a_zb_y\left(\vec{k}\times\vec{j}\right)+a_zb_z\left(\vec{k}\times\vec{k}\right)=$$

принимая во внимание, что

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

$$=\vec{0}+a_xb_y\vec{k}-a_xb_z\vec{j}-a_yb_x\vec{k}+\vec{0}+a_yb_z\vec{i}+a_zb_x\vec{j}-a_zb_y\vec{i}+\vec{0}=$$

$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}-\left(a_xb_z-a_zb_x\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}= \qquad .$$

$$\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}$$

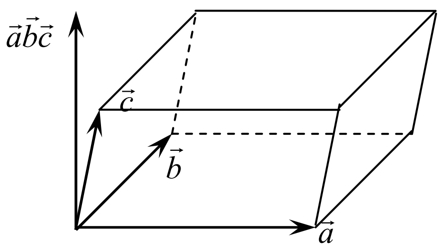
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k} \text{ или } \vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

6. $S_{\text{пар}}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, $S_{\Delta}=\dfrac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

Смешанное произведение векторов и его свойства

Рассмотрим произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, составленное следующим образом: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$. Такое произведение называется *векторно-скалярным* или *смешанным*.

Выясним геометрический смысл выражения $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$. Построим параллелепипед, ребрами которого являются векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и вектор $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$.



Имеем :$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{d}\cdot\vec{c}=\left|\vec{d}\right|\cdot\text{пр}_{\vec{d}}\vec{c}$, $\left|\vec{d}\right|=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=S$, где S — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\text{пр}_{\vec{d}}\vec{c}=H$ для правой тройки векторов и $\text{пр}_{\vec{d}}\vec{c}=-H$ для левой, где H — высота параллелепипеда. Получаем: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=S\cdot\left(\pm H\right)=\pm V$, где V — объем параллелепипеда, образованного векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Т.о., смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «плюс», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «минус", если они образуют левую тройку.

Свойства смешанного произведения

1. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$;
2. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$;
3. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b},\ \ \vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c},\ \ \vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}$;
4. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0\Leftrightarrow\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — компланарны;
5. Выражение смешанного произведения через координаты

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)\right)\cdot\vec{c}=$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot\left(c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}\right)=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}c_z;$$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

6. Взаимная ориентация векторов в пространстве: если $\vec{a}\vec{b}\vec{c}>0$, то $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — правая тройка, если $\vec{a}\vec{b}\vec{c}<0$, то $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — левая тройка;
7. $V_{\text{пар}}=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$, $V_{\text{пир}}=\dfrac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$.

ТЕМА IV. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

n-МЕРНЫЙ ВЕКТОР

Ранее было сказано, что матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется вектором. Теперь мы дадим более строгое определение этого понятия.

Последовательность n действительных чисел называется n*-мерным вектором*. Обозначается $\vec{a}=\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)$.

Числа $a_1,a_2,\ldots,a_n$ называются *координатами* вектора, а n – *размерностью* вектора.

Два n-мерных вектора $\vec{a}=\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)$ и $\vec{b}=\left(b_1,b_2,\ldots,b_n\right)$ называются *равными*, когда равны их соответствующие координаты:

$$\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\ a_2=b_2\\ \ldots\\ a_n=b_n\end{cases}.$$

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД n-МЕРНЫМИ ВЕКТОРАМИ

Суммой векторов $\vec{a}=\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)$ и $\vec{b}=\left(b_1,b_2,\ldots,b_n\right)$ называется вектор $\vec{a}+\vec{b}=\left(a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n\right)$.

Произведением вектора $\vec{a}=\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)$ *на число* λ называется вектор $\lambda\vec{a}=\left(\lambda a_1,\lambda a_2,\ldots,\lambda a_n\right)$.

Вектор $\vec{0}$ называется *нулевым*, если для любого вектора выполняется равенство $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

Вектор $-\vec{a}$ называется *противоположным* вектору $\vec{a}$, если $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$

Т.к. операции над n-мерными векторами определяются через операции над их координатами, то многие свойства арифметических операций справедливы и для операций над векторами:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$;
3. $\lambda_1\left(\lambda_2\vec{a}\right)=\left(\lambda_1\lambda_2\right)\vec{a}$;
4. $\left(\lambda_1+\lambda_2\right)\vec{a}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a}$;
5. $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;
6. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ. ДЛИНА

Скалярным произведением векторов $\vec{a}=\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)$ и $\vec{b}=\left(b_1,b_2,\ldots,b_n\right)$ называется число:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\ldots+a_n\cdot b_n\right).$$

Длиной (модулем) вектора $\vec{a}=\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)$ называется число $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}^2}$.

Углом между векторами $\vec{a}=\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)$ и $\vec{b}=\left(b_1,b_2,\ldots,b_n\right)$ называется число $\varphi\in\left[0,\pi\right]$, для которого $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$.

n-МЕРНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО. БАЗИС

Множество $\mathbf{L}$ элементов $\mathrm{x},\mathrm{y},\ldots,\mathrm{z}$ называется *линейным (векторным) пространством*, если:

1. Для любых двух элементов $\mathrm{x}\in\mathbf{L}$ и $\mathrm{y}\in\mathbf{L}$ определена операция сложения;

2. Для любого элемента $x \in \mathbf{L}$ и любого числа α определена операция умножения элемента x на число α;
3. Определено равенство элементов из $\mathbf{L}$;
4. Операции (1) и (2) удовлетворяют условиям:
   a. $x+y=y+x$;
   b. $(x+y)+z=x+(y+z)$;
   c. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;
   d. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;
   e. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$;
   f. существует элемент, называемый нулевым, такой, что $x+0=x$;
   g. для любого $x \in \mathbf{L}$ имеет место $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
   h. для любого $x \in \mathbf{L}$ существует элемент $-x$, называемый противоположным, такой, что $x+(-x)=0$.

Совокупность всех n-мерных векторов образует <u>*линейное векторное пространство*</u> $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$.

<u>*Свойства*</u> линейного векторного пространства:
1. В каждом линейном векторном пространстве существует единственный элемент $\vec{0}$;
2. В каждом линейном векторном пространстве любому элементу соответствует единственный противоположный элемент;
3. Для всякого элемента $\vec{a}$ справедливо равенство $\vec{0} \cdot \vec{a} = \vec{0}$;
4. Для любого числа α справедливо равенство $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$;
5. Для каждого элемента $\vec{a}$ справедливо $-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a}$.

Пример. Убедимся в том, что множество всех диагональных матриц порядка n образуют линейное пространство.

Решение. Для матриц определена операция сложения и умножения на число. Свойства действий следуют из свойства действий над матрицами. Нулевой элемент $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, противоположенный элемент $O=\begin{pmatrix} -a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -a_{nn} \end{pmatrix}$. ❒

Линейная независимость векторов

Определяется также как в случае трехмерных геометрических векторов: если для системы k векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ равенство $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0}$ верно только при $\lambda_i = 0 \ (i = 1, \ldots, k)$, то эта система называется *линейно независимой*.

Следовательно, решение вопроса о линейной зависимости или независимости системы из k n-мерных векторов сводится к исследованию линейной однородной системы n уравнений с k неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1k}\lambda_k = 0 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{2k}\lambda_k = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \ldots + a_{nk}\lambda_k = 0 \end{cases}.$$

Можно показать, что если векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ линейно зависимы, то хотя бы один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных и наоборот.

Базис линейного векторного пространства и координаты вектора

Любая совокупность n линейно независимых векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называется *базисом* пространства $\mathbf{R}^\mathbf{n}$, если каждый вектор из пространства $\mathbf{R}^\mathbf{n}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов этой совокупности, т.е. $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$.

Такое представление вектора называется *разложением его по данному базису*. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *координатами вектора* в этом базисе.

Теорема IV.1 Координаты вектора относительно некоторого базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ определяются единственным образом.

Доказательство:

Пусть имеется два разложения некоторого вектора $\vec{x}$ относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$$
$$\vec{x} = x_1'\vec{e}_1 + x_2'\vec{e}_2 + \ldots + x_n'\vec{e}_n$$

Вычитая из первого равенства второе, получим:

$$\vec{0} = (x_1 - x_1')\vec{e}_1 + (x_2 - x_2')\vec{e}_2 + \ldots + (x_n - x_n')\vec{e}_n.$$

Т.к. векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ линейно независимы, то значит, что коэффициенты линейной комбинации могут быть только нулями, т.е. $x_1 = x_1',\ x_2 = x_2', \ldots,\ x_n = x_n'$. ❒

Одним из базисов пространства $\mathbf{R^n}$ является система

$$\vec{e}_1 = (1,0,\ldots,0)$$
$$\vec{e}_2 = (0,1,\ldots,0)$$
$$\ldots$$
$$\vec{e}_n = (0,0,\ldots,1)$$

Действительно, система

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$ имеет только тривиальное (нулевое) решение. Значит система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ линейно независима. И любой вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ разлагается по этой системе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ следующим образом $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n$. Т.е. координаты вектора это коэффициенты в разложении этого вектора по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

Любой другой базис пространства $\mathbf{R^n}$ также состоит из n векторов.

Размерностью пространства $\mathbf{R^n}$ называется число векторов в любом его базисе. Это означает, что если размерность пространства равна n, то в нем можно указать n линейно независимых векторов, а любые $n+1$ векторов этого пространства линейно зависимы.

ПЕРЕХОД К НОВОМУ БАЗИСУ

Поскольку $\mathbf{R^n}$ может иметь не единственный базис встает вопрос, о переходе от разложения в одном базисе к разложению в другом базисе.

Пусть имеется два базиса: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n$, и пусть некоторый вектор раскладывается по базисам $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i\vec{\varepsilon}_i$.

Очевидно, что векторы базиса $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n$ также можно разложить по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$:

$$\begin{cases} \vec{\varepsilon}_1 = \tau_{11}\vec{e}_1 + \tau_{21}\vec{e}_2 + \ldots + \tau_{n1}\vec{e}_n \\ \vec{\varepsilon}_2 = \tau_{12}\vec{e}_1 + \tau_{22}\vec{e}_2 + \ldots + \tau_{n2}\vec{e}_n \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{\varepsilon}_n = \tau_{1n}\vec{e}_1 + \tau_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + \tau_{nn}\vec{e}_n \end{cases}.$$

Составим матрицу перехода T :

$$T=\begin{pmatrix}\tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n}\\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn}\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix},\ X'=\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ \dots\\ x_n'\end{pmatrix},$$ тогда $X=T\cdot X'$ или обратное соотношение $X'=T^{-1}\cdot X$.

Матрица T называется <u>*матрицей преобразования координат*</u> при переходе от базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$ к базису $\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\dots,\vec{\varepsilon}_n$.

Пример. Координаты вектора $\vec{x}=(6;6;1)$ даны в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$. Записать его координаты в базисе $\vec{\varepsilon}_1=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\frac{5}{6}\vec{e}_3$, $\vec{\varepsilon}_2=-5\vec{e}_1-\vec{e}_2$, $\vec{\varepsilon}_3=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$.

Решение. Запишем матрицу перехода $T=\begin{pmatrix}1 & -5 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ \frac{5}{6} & 0 & 1\end{pmatrix}$. Строим обратную матрицу $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -5 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ \frac{5}{6} & 0 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$. Поэтому $T^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -5 & 6\\ \frac{1}{6} & -\frac{11}{6} & 2\\ -\frac{5}{6} & \frac{25}{6} & -4\end{pmatrix}$.

Тогда $x'=\begin{pmatrix}1 & -5 & 6\\ \frac{1}{6} & -\frac{11}{6} & 2\\ -\frac{5}{6} & \frac{25}{6} & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\ 6\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ -8\\ 16\end{pmatrix}$. ❒

ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

Линейное пространство называется <u>*евклидовым*</u>, если в нем определена операция, ставящая в соответствие любым двум элементам $\mathrm{x}\in\mathbf{L}$ и $\mathrm{y}\in\mathbf{L}$ число, называемое скалярным произведением и обозначаемое (x,y), для которого выполняется:

1. $(\mathrm{x},\mathrm{y})=(\mathrm{y},\mathrm{x})$;
2. $(\mathrm{x}+\mathrm{y},\mathrm{z})=(\mathrm{x},\mathrm{z})+(\mathrm{y},\mathrm{z})$;
3. $(\alpha\,\mathrm{x},\mathrm{y})=\alpha(\mathrm{x},\mathrm{y})$;
4. $(\mathrm{x},\mathrm{x})\geq 0$, причем $(\mathrm{x},\mathrm{x})=0\Leftrightarrow \mathrm{x}=0$.

Обозначается $\mathbf{E^n}$.

Линейное пространство называется <u>*нормированным*</u>, если каждому элементу $\mathrm{x}\in\mathbf{L}$ поставлено в соответствие неотрицательное число, называемое его нормой $\|\mathrm{x}\|$. При этом выполняются аксиомы:

1. $\|\mathrm{x}\|\geq 0; \|\mathrm{x}\|=0\Leftrightarrow \mathrm{x}=0$;

2. $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$;

3. $\|(x,y)\|\le\|x\|\cdot\|y\|$

4. $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$.

Если в качестве нормы любого вектора из $\mathbf{R}^n$ принять его длину $\|x\|=|x|$, то станет ясно, что $\mathbf{R}^n$ является евклидовым, нормированным пространством.

Ортонормированный базис

Под операцией *нормирования* вектора понимают умножение ненулевого вектора на число $\frac{1}{|\vec{a}|}$, т.е. $\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Векторы из $\mathbf{R}^n$ называются *ортогональными*, если для них выполняется равенство $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Базис векторного пространства называется *ортогональным*, если векторы этого базиса попарно ортогональны.

Если все векторы ортогонального базиса имеют единичную длину, то базис называется *ортонормированным*.

Легко проверить, что базис

$$\begin{array}{l}\vec{e}_1=(1,0,\dots,0)\\ \vec{e}_2=(0,1,\dots,0)\\ \quad\dots\\ \vec{e}_n=(0,0,\dots,1)\end{array}.$$

является ортонормированным в $\mathbf{R}^n$. В трехмерном пространстве ортонормированным базисом является базис $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

Теорема IV.2 Во всяком векторном пространстве существует ортонормированный базис.

Доказательство: для $n=3$

Пусть $\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$, $\vec{\varepsilon}_3$ некоторый произвольный базис. Построим какой-нибудь ортонормированный базис $\vec{e}_1^{\,0},\vec{e}_2^{\,0},\vec{e}_3^{\,0}$.

Положим $\vec{e}_1=\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{e}_2=\vec{\varepsilon}_2+\alpha\vec{e}_1$, α подберем так, чтобы

$$(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=0\Rightarrow\alpha=-\frac{(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2)}{(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_1)}.$$

Далее определим $\vec{e}_3 = \vec{\varepsilon}_3 + \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2$, так чтобы $\left.\begin{array}{l}(\vec{e}_1,\vec{e}_3)=0\\ (\vec{e}_2,\vec{e}_3)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \beta_1 = -\dfrac{(\vec{e}_1,\vec{\varepsilon}_3)}{(\vec{e}_1,\vec{e}_1)}; \beta_2 = -\dfrac{(\vec{e}_2,\vec{\varepsilon}_3)}{(\vec{e}_2,\vec{e}_2)}$. Остается только пронормировать построенный базис: $\vec{e}_1^{\,0} = \dfrac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|}$, $\vec{e}_2^{\,0} = \dfrac{\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|}$, $\vec{e}_3^{\,0} = \dfrac{\vec{e}_3}{|\vec{e}_3|}$. ❐

Пример. Построим ортонормированный базис исходя из базиса $\vec{e}_1(-2;0;1)$, $\vec{e}_2(1;-1;0)$, $\vec{e}_3(0;1;2)$.

Решение. $\vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1 = (-2;0;1)$. Ищем $\vec{\varepsilon}_2 = \vec{e}_2 + \alpha\vec{\varepsilon}_1$. Подберем α так, чтобы $(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2) = (\vec{e}_1,\vec{e}_2) + \alpha(\vec{e}_1,\vec{e}_1) = -2 + 5\alpha = 0$. Получим $\alpha = \frac{2}{5}$.

Ищем $\vec{\varepsilon}_3 = \vec{e}_3 + \beta\vec{\varepsilon}_1 + \gamma\vec{\varepsilon}_2$. Подбираем β и γ так, чтобы $\begin{cases}(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_3) = (\vec{e}_1,\vec{e}_3) + \beta(\vec{e}_1,\vec{e}_1) = 2 + 5\beta = 0\\ (\vec{\varepsilon}_2,\vec{\varepsilon}_3) = (\vec{\varepsilon}_2,\vec{e}_3) + \gamma(\vec{\varepsilon}_2,\vec{\varepsilon}_2) = -\frac{1}{5} + \frac{6}{5}\gamma = 0\end{cases}$. Отсюда $\beta = -\frac{2}{5}, \gamma = \frac{1}{6}$.

Получаем $\vec{\varepsilon}_1 = (-2;0;1)$, $\vec{\varepsilon}_2 = \left(\frac{1}{5},-1,\frac{2}{5}\right)$, $\vec{\varepsilon}_3 = \left(\frac{5}{6},\frac{5}{6},\frac{5}{3}\right)$.

Пронормируем $|\vec{\varepsilon}_1| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$, $\vec{\varepsilon}_1^{\,0}\left(\frac{-2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $|\vec{\varepsilon}_2| = \sqrt{\frac{1}{25}+1+\frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{6}{5}}$, $\vec{\varepsilon}_2^{\,0}\left(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{-5}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}}\right)$ и $|\vec{\varepsilon}_3| = \sqrt{\frac{25}{36}+\frac{25}{36}+\frac{25}{9}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$, $\vec{\varepsilon}_3^{\,0}\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$. ❐

Линейные операторы

Если задан закон, который каждому вектору $\vec{x} \in \mathbf{R^n}$ ставит в соответствие вектор $\vec{y} \in \mathbf{R^n}$, то говорят, что в пространстве задан *оператор* $\mathcal{A}$, при это пишут: $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$.

Оператор $\mathcal{A}$ называется *линейным*, если для любых $\vec{x}_1 \in \mathbf{R^n}$ и $\vec{x}_2 \in \mathbf{R^n}$ и произвольного числа α выполняются условия:

1. $\mathcal{A}\,(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \mathcal{A}\,\vec{x}_1 + \mathcal{A}\,\vec{x}_2$;
2. $\mathcal{A}\,(\alpha\vec{x}) = \alpha\,\mathcal{A}\vec{x}$.

Матрица линейного оператора

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R^n}$ базис $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$, и пусть в этом пространстве определен линейный оператор $\mathcal{A}: \vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$. Разложим векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ по этому базису:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$$
$$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n.$$

В силу линейности оператора $\mathcal{A}$ можно написать: $\mathcal{A}\vec{x} = x_1\mathcal{A}\vec{e}_1 + x_2\mathcal{A}\vec{e}_2 + \ldots + x_n\mathcal{A}\vec{e}_n$. Но каждый $\mathcal{A}\vec{e}_i$ можно разложить по базису $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$, т.е.

$$\mathcal{A}\vec{e}_i = a_{1i}\vec{e}_1 + a_{2i}\vec{e}_2 + \ldots + a_{ni}\vec{e}_n \quad (i = 1,2,\ldots,n).$$

Подставив разложения в $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$ и приравняв коэффициенты при базисных векторах, получим:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \, .$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$y_1 = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n$$

Т.о. линейному оператору $\mathcal{A}$ в данном базисе соответствует квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

которая называется <u>*матрицей линейного оператора*</u> $\mathcal{A}$, i-ый столбец которой состоит из координат вектора $\mathcal{A}\vec{e}_i$ относительно данного базиса. Если ввести в рассмотрение одностолбцовые матрицы

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$, система запишется в матричном виде $Y = AX$.

Действия с линейными операторами

<u>*Суммой линейных операторов*</u> $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называется оператор $\mathcal{C}$, определяемый равенством $\mathcal{C}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{x} + \mathcal{B}\vec{x}$.

Очевидно, что матрица линейного оператора суммы равна сумме матриц линейных операторов слагаемых $C = A + B$

<u>*Произведением линейного оператора $\mathcal{A}$ на число*</u> α называется оператор $\alpha\,\mathcal{A}$, определяемый равенством $(\alpha\,\mathcal{A})\vec{x} = \alpha(\mathcal{A}\vec{x})$.

Матрица этого оператора равна $\alpha \cdot A$.

Пусть в $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ определены линейные операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ таким образом, что $\vec{y} = \mathcal{B}\vec{x}$, $\vec{z} = \mathcal{A}\vec{y}$.

<u>*Произведением $\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}$ линейных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$*</u> называется оператор $\mathcal{C}$, определяемый соотношением $\mathcal{C}\,\vec{x} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\vec{x})$.

Можно показать, что матрица $C = A \cdot B$.

Пример. Пусть $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathcal{A}\vec{x} = (x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3)$,

$\mathcal{B}\vec{x} = (x_2, 2x_3, x_1)$. Найдем $(\mathcal{A}\,\mathcal{B})\vec{x}$, $(\mathcal{B}(\mathcal{A}-\mathcal{B}))\vec{x}$.

Решение. Запишем матрицы линейных операторов $A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}$. Выполним действия с матрицами $AB=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$,

$$\left(B\left(A-B\right)\right)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&-2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&2\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Запишем соответствующие линейные операторы $(\mathcal{AB})\,\vec{x}=\left(-x_1+2x_3,x_2,x_1+x_2\right)$,
$(\mathcal{B}(\mathcal{A}-\mathcal{B}))\,\vec{x}=\left(x_1-2x_3,2x_3,-x_3\right)$. ❒

Связь между матрицами линейного оператора в разных базисах

Пусть задан линейный оператор $\vec{y}=\mathcal{A}\vec{x}$ или в матричном виде $Y=AX$ относительно данного базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$. Выберем в том же пространстве другой базис $\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\ldots,\vec{\varepsilon}_n$. относительно этого базиса матрица линейного оператора будет другой. Обозначим через T матрицу преобразования координат, а X' и Y' разложения векторов в новом базисе, т.е.
$X=TX',Y=TY'$. Подставляя, получим $TY'=ATX'$, умножая на T^{-1}, получим $Y'=T^{-1}ATX'$.

Итак, при переходе к новому базису матрица линейного оператора меняется и становится равной $T^{-1}AT$.

Пример. Матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ имеет вид $A=\begin{pmatrix}0&-2&1\\-1&1&0\\2&-1&1\end{pmatrix}$. Найдем матрицу этого оператора в базисе $\vec{\varepsilon}_1=\vec{e}_1+\vec{e}_2+2\vec{e}_3$, $\vec{\varepsilon}_2=2\vec{e}_1-\vec{e}_2$. $\vec{\varepsilon}_3=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$.

Решение. Запишем матрицу перехода $T=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$, тогда

$T^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&-3&2\\-2&-4&3\end{pmatrix}$. Матрица в новом базисе имеет вид

$$A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -9 & 5 \\ 6 & 13 & -9 \\ 9 & 23 & -12 \end{pmatrix}. \square$$

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Ненулевой вектор $\vec{x}$ называется *собственным вектором* линейного оператора $\mathcal{A}$, если найдется такое число λ, что будет выполняться равенство $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$. При этом число λ называется *собственным значением (собственным числом) оператора* $\mathcal{A}$, соответствующим вектору $\vec{x}$. Множество всех собственных значений оператора $\mathcal{A}$ называется его *спектром*.

Для того, чтобы найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\mathcal{A}$, рассмотрим матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе ($n = 3$):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Тогда в силу определения

$$AX = \lambda X \Rightarrow AX - \lambda EX = 0 \Rightarrow (A - \lambda E)X = 0.$$

Итак, дело свелось к решению системы линейных однородных уравнений. Очевидно, что система имеет ненулевое решение, если $\det(A - \lambda E) = 0$.

Уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ называется *характеристическим уравнением* оператора $\mathcal{A}$; многочлен $\det(A - \lambda E)$ называется *характеристическим многочленом* оператора $\mathcal{A}$. В координатной форме характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема IV.3 Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса.

Доказательство:

Запишем характеристический многочлен в новом базисе $\det(A' - \lambda E) = 0$. Если известна матрица перехода от старого базиса к новому C, получим

$$\det\left(A'-\lambda E\right)=\det\left(C^{-1}A'C-\lambda C^{-1}EC\right)=\det\left(C^{-1}\left(A'-\lambda E\right)C\right)=$$
$$=\det\left(C^{-1}\right)\det\left(A-\lambda E\right)\det\left(C\right)=\det\left(C^{-1}\right)\det\left(C\right)\det\left(A-\lambda E\right)=\det\left(A-\lambda E\right).\ \square$$

Решая характеристическое уравнение, найдем собственные значения оператора, а затем собственные векторы оператора.

Матрица линейного оператора принимает наиболее простой вид, если в качестве базисных взять собственные векторы линейного оператора.

$\mathcal{A}\vec{e}_i=a_{1i}\vec{e}_1+a_{2i}\vec{e}_2+\ldots+a_{ni}\vec{e}_n$, но $\mathcal{A}\vec{e}_i=\lambda\vec{e}_i$.

Поэтому $a_{ij}=0,\ i\neq j$ и $a_{ii}=\lambda_i$, т.е. матрица является диагональной и по диагонали стоят ее собственные значения.

Можно доказать теорему.

> ***Теорема IV.4*** Если линейный оператор имеет n различных собственных значений, то отвечающие им собственные векторы линейно независимы и матрица этого оператора записанная в базисе состоящем из собственных векторов имеет диагональный вид.

Пример. Найдем собственные значения и собственные векторы оператора $A=\begin{pmatrix}1&-4&-8\\-4&7&-4\\-8&-4&1\end{pmatrix}$.

Решение. Запишем характеристическое уравнение $\begin{vmatrix}1-\lambda&-4&-8\\-4&7-\lambda&-4\\-8&-4&1-\lambda\end{vmatrix}=0, \lambda^3-9\lambda^2-81\lambda+729=0$ и решим его $\lambda_1=\lambda_2=9$, $\lambda_3=-9$. Найдем собственные векторы для каждого собственного значения $\lambda_1=\lambda_2=9$, матрица системы $\begin{pmatrix}-8&-4&-8\\-4&-2&-4\\-8&-4&-8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&1&2\end{pmatrix}$, тогда

$$X=c_1\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$\lambda_3=-9$, матрица системы $\begin{pmatrix}10&-4&-8\\-4&16&-4\\-8&-4&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-4&1\\0&2&-1\end{pmatrix}$ и $X=c\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$. $\square$

Линейная модель обмена

Рассмотрим следующий вопрос: какими должны быть соотношения между бюджетами стран, торгующих между собой, чтобы торговля была взаимовыгодной, то есть практически бездефицитной для каждой из этих стран. Такая задача называется линейной моделью обмена, или моделью международной торговли.

Пусть имеется n стран $S_1, S_2, \ldots, S_n$, национальный доход каждой из которых равен $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим a_{ij} долю национального дохода, которую страна S_j тратит на покупку товаров у страны S_i. Будем считать, что весь национальный доход тратится на закупку товаров $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1,\ j = 1, 2, \ldots n$.

Рассмотрим <u>*структурную матрицу торговли*</u>:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для любой страны S_i выручка от внутренней и внешней торговли составит $p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$. Для сбалансированной торговли необходимо, чтоб выручка каждой страны была не меньше ее национального дохода: $p_i \geq x_i$. Если считать, $p_i > x_i$, получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n > x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n > x_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n > x_n \end{cases}$$

Сложим неравенства и сгруппируем:

$$\left(a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{n1}\right)x_1 + \left(a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{n2}\right)x_2 + \ldots +$$
$$+\left(a_{1n} + a_{2n} + \ldots + a_{nn}\right)x_n > x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

Выражения в скобках равны единице, поэтому приходим к противоречивому неравенству.

Значит $p_i = x_i$. Получаем матричное уравнение $AX = X$.

Это уравнение означает, что собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$, состоит из бюджетов стран, ведущих сбалансированную торговлю. Итак, задача свелась к нахождению собственного вектора структурной матрицы торговли, отвечающей собственному значению $\lambda = 1$.

Пример. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$. Выясним при каких условиях достигается сбалансированность торговли этих стран?

Решение. Уравнение $AX = X$ перепишем в виде $(A-E)X = 0$

$\begin{pmatrix} -0,8 & 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & -0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & -0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ранг этой системы равен двум. Решая ее, получаем $\begin{cases} x_1 = \frac{13}{12} x_3 \\ x_2 = \frac{11}{9} x_3 \end{cases}$.

Положив $x_3 = 36$ (чтобы не было дробных чисел), получаем вектор $X = (39,44,36)$, который можно взять в качестве собственного вектора.

Итак, сбалансированность торговли этих стран достигается при условии, что их бюджеты находятся в соотношении $x_1 : x_2 : x_3 = 39 : 44 : 36$.

Квадратичные формы

Квадратичной формой $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n переменных называется сумма, каждый член которой является либо квадратом одной из переменных, либо произведением двух разных переменных, взятых с некоторым коэффициентом:

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j .$$

Запишем квадратичную форму в стандартном виде:

$$\begin{aligned} &\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ &= a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \\ &+a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \ldots + \\ &+a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_nx_n \end{aligned},$$

причем предполагаем, что $a_{ij} = a_{ji}$.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется матрицей квадратичной формы. Квадратичная форма называется *невырожденной*, если $r(A) = n$. В матричной записи квадратичная форма имеет вид:

$\Phi\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = X^T A X$, где $X = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^T$. Вид матрицы квадратичной формы определяется базисом, в котором задан вектор.

При невырожденном линейном преобразовании переменных $X = CY$, где $C = \left(c_{ij}\right)$. Квадратичная форма принимает вид $\Phi = X^T A X = \left(CY\right)^T A\left(CY\right) = \left(Y^T C^T\right) A\left(CY\right) = Y^T\left(C^T A C\right) Y$, т.е. $A' = C^T A C$.

При некоторых удачно выбранных преобразованиях вид квадратичной формы можно существенно упростить.

Квадратичная форма называется <u>*канонической*</u>, если $a_{ij} = 0, i \neq j$, а ее матрица является диагональной. $\Phi = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2$.

> ***Теорема IV.5*** Любая квадратичная форма с помощью невырожденного линейного преобразования переменных может быть приведена к каноническому виду.

Чтобы привести квадратичную форму к каноническому виду, следует перейти к базису собственных векторов матрицы квадратичной формы A.

Если собственные числа матрицы A различны, то соответствующие собственные векторы образуют ортогональный базис, который можно нормировать. В этом ортонормированном базисе матрица квадратичной формы будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ где } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \text{ – собственные числа.}$$

Линейное преобразование, которое приводит матрицу квадратичной формы к каноническому виду, имеет матрицу H . Матрица H , столбцами которой являются координаты векторов ортонормированного базиса, называется <u>*ортогональной*</u>, а линейное преобразование с такой матрицей – ортогональным преобразованием. Можно показать, что для ортогональной матрицы выполняется соотношение $H^T = HH^T E$, что означает $H^{-1} = H^T$.

Пример. Привести квадратичную форму $\Phi\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$ к каноническому виду.

Решение. Запишем матрицу квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем ее собственные числа $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_2 = 3$. В базисе собственных векторов матрица квадратичной формы имеет вид $A'=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, а квадратичная форма $\Phi\left(x_1', x_2', x_3'\right) = -2x_1'^2 + 6x_2'^2 + 3x_3'^2$. ❐

ТЕМА V. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Системы координат на плоскости

Прямоугольная (декартова) система координат задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный отрезок. Единичные векторы осей обозначают $\vec{i}=(1,0)$ и $\vec{j}=(0,1)$. Систему координат Oxy.

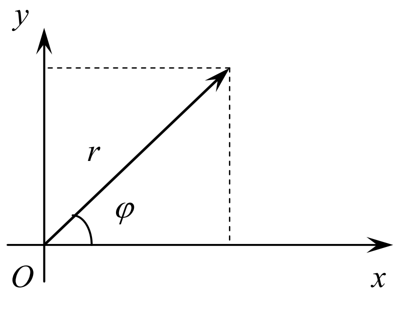
Рассмотрим произвольную точку M плоскости Oxy. Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиус–вектором* точки M.

Координатами точки M в системе координат Oxy называются координаты радиус–вектора $\overrightarrow{OM}$. Если $\overrightarrow{OM}=(x,y)$, то координаты точки записывают так $M(x,y)$. Числа x и y полностью определяют положение точки на плоскости: каждой паре чисел x и y соответствует единственная точка M плоскости, и наоборот.

Полярная система координат задается точкой O, называемой *полюсом*, лучом Op, называемым *полярной осью*.

Положение точки M определяется двумя числами: расстоянием r от полюса и углом φ, образованным отрезком OM с полярной осью (против часовой стрелки).

Числа r и φ называются *полярными координатами* точки M, пишут $M(r,\varphi)$, при этом r — *полярный радиус*, φ — *полярный угол*.



Связь между прямоугольными и полярными координатами выражается следующим образом:

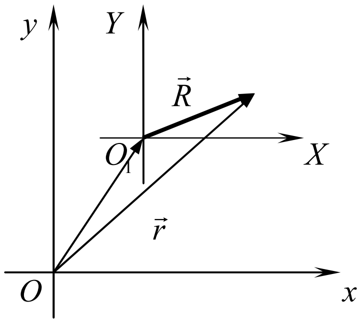
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Переход от одной системы координат в какую-либо другую называется <u>*преобразованием системы координат*</u>.

Под <u>*параллельным переносом осей координат*</u> понимают переход к новой системе O_1XY, при котором меняется положение начала координат, а направление и масштаб остаются неизменными.

Пусть оси O_1X и O_1Y параллельны осям Ox и Oy. Допустим точка $M(x, y)$ в системе координат O_1XY имеет координаты X и Y. Установим связь между ними.



Из чертежа видно, что $\vec{r} = \overrightarrow{OO_1} + \vec{R}$. Если $O_1(a, b)$ относительно системы Oxy, то

$$\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases}.$$

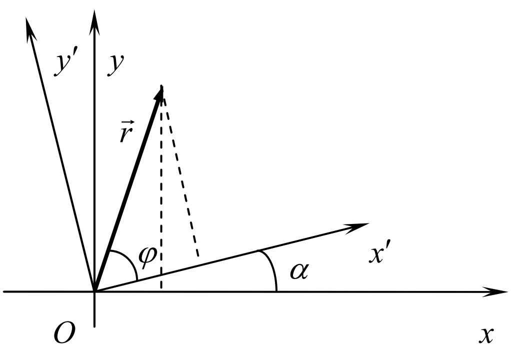
Под <u>*поворотом осей координат*</u> понимают такое преобразование координат, при котором обе оси поворачиваются на один угол, а начало координат и масштаб остаются неизменными.

Повернем исходную систему координат Oxy на угол α, и пусть она займет положение Ox_1y_1. Получим соотношения

$$x = |\vec{r}|\cos(\varphi + \alpha) = |\vec{r}|\cos\varphi\cos\alpha - |\vec{r}|\sin\varphi\sin\alpha = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha$$

$$y = |\vec{r}|\sin(\varphi + \alpha) = |\vec{r}|\sin\varphi\cos\alpha + |\vec{r}|\cos\varphi\sin\alpha = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha,$$

Т.е. $\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$



Деление отрезка в данном отношении

Отрезок AB, где $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ разделим в заданном отношении $\lambda > 0$.

$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$, но $\overrightarrow{AM} = (x - x_1, y - y_1)$, а $\overrightarrow{MB} = (x_2 - x, y_2 - y)$.

Учитывая, что равные векторы имеют равные координаты, получим $x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x$ и $y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y$,

Т.е. $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$.

Линии на плоскости

Введение системы координат позволяет определить положение точки плоскости заданием двух чисел, а положение линии на плоскости определяет уравнение, т.е. равенство, связывающее координаты точек.

Уравнением линии на плоскости Oxy называется такое уравнение $F(x, y) = 0$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Уравнение линии позволяет изучение геометрических свойств линии заменить исследованием ее уравнения.

Уравнение $F(r, \varphi) = 0$ называется *уравнением линии в полярной системе координат*.

Линию на плоскости можно задать при помощи двух уравнений (*параметрическое уравнение*):

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где x и y — координаты произвольной точки, а t — переменная называемая *параметром*.

Линию на плоскости можно задать *векторным уравнением*: $\vec{r} = \vec{r}(t)$. При изменении параметра конец вектора $\vec{r}$ опишет некоторую линию.

Уравнение прямой на плоскости

Положение прямой на плоскости однозначно определяется ординатой точки $N(0, b)$ пересечения с осью Oy и углом α между осью Ox и прямой: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y - b}{x}$. Обозначив $k = \operatorname{tg}\alpha$, получим *уравнение прямой с угловым коэффициентом* $y = kx + b$.

Если прямая параллельна оси Ox, то $\alpha = 0$ и $k = \operatorname{tg}\alpha = 0$. Уравнение примет вид $y = b$.

Если прямая параллельна оси Oy, то $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha$ не существует. Уравнение примет вид $x = a$.

Рассмотрим уравнение первой степени относительно x и y в общем виде $Ax + By + C = 0$. Покажем, что это уравнение прямой на плоскости.

Если $B = 0$, уравнение имеет вид $Ax + C = 0$, т.е. $x = -\dfrac{C}{A}$. Это прямая параллельная оси Oy. Если $B \neq 0$, то получим $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$ уравнение прямой с угловым коэффициентом $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{A}{B}$.

Уравнение $Ax + By + C = 0$ называют <u>*общим уравнением прямой*</u>.

Некоторые частные случаи общего уравнения прямой:

1. Если $A = 0$, то уравнение имеет вид $y = -C/B$. Это уравнение прямой, параллельной оси Ox;
2. Если $B = 0$, то прямая параллельна оси Oy;
3. Если $C = 0$, то прямая проходит через начало координат.

Уравнение прямой, проходящей <u>*через точку*</u> $M_0(x_0, y_0)$ <u>*перпендикулярно ненулевому вектору*</u>, $\vec{n} = (A, B)$ получим, если запишем условие перпендикулярности векторов $\vec{n} = (A, B)$ и $\overrightarrow{M_0M}$, где точка $M(x, y)$ произвольная точка прямой.

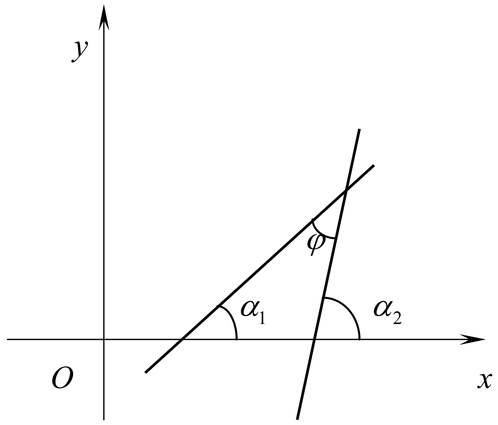
$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ или $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Это уравнение можно переписать в виде $Ax + By + C = 0$, где $C = -Ax_0 - By_0$.

Уравнение прямой проходящей через две точки известно из школы: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Если прямая пересекает ось Ox в точке $M_1(a, 0)$, а ось Oy в точке $M_2(0, b)$. В этом случае $\dfrac{x - a}{0 - a} = \dfrac{y - 0}{b - 0}$, т.е. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$. Оно называется <u>*уравнением прямой в отрезках*</u>.

Прямая на плоскости. Основные задачи

Пусть прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$. Найдем <u>*угол*</u> φ, на который надо повернуть одну прямую вокруг точки их пересечения до совпадения с другой прямой.



Имеем $\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$ (внешний угол треугольника) или $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$.

Тогда $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2}$

или с учетом $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1, k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$, получим $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$.

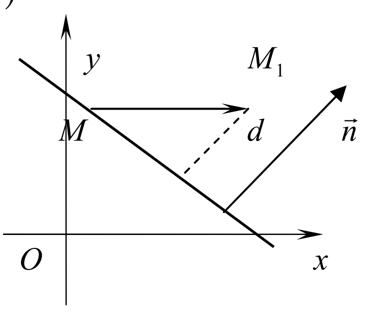
Если прямые <u>*параллельны*</u>, то $k_1 = k_2$.

Если прямые <u>*перпендикулярны*</u>, то $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Если прямые заданы уравнениями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, то условие <u>*перпендикулярности*</u> запишется $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$. А условие параллельности $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$.

Найдем расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$.

Расстояние d равно модулю проекции вектора $\overrightarrow{MM_0}$, где M произвольная точка прямой на направление нормального вектора $\vec{n} = (A, B)$. Т.е.

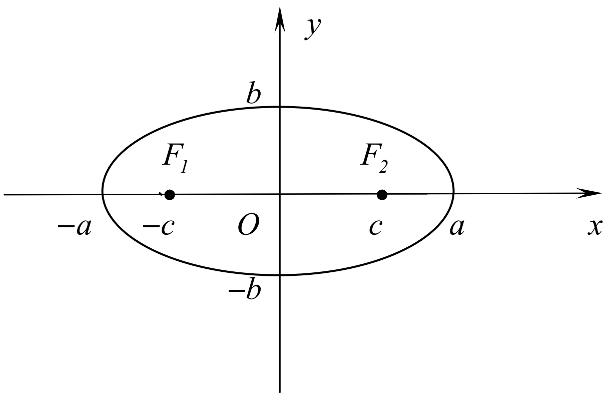


$$d=\left|\text{пр}_{\vec n}\overrightarrow{MM_0}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{MM_0}\cdot\vec n}{|\vec n|}\right|=\left|\frac{(x_0-x)A+(y_0-y)B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \text{т.к.}$$

M принадлежит прямой и $Ax+By+C=0$

Линии второго порядка

Эллипсом называется множество точек на плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (равная $2a,\ a>0$), большая, чем расстояние между фокусами ($2c$).



Проведем ось Ox через фокусы эллипса, от F_1 до F_2. Начало координат возьмем в середине отрезка F_1F_2. Фокусы имеют координаты $F_1(-c,0),\ F_2(c,0)$.

Пусть точка $M(x,y)$ принадлежит эллипсу, векторы $\vec r_1$ и $\vec r_2$ называются ее *фокальными радиус-векторами*.

По определению $|\vec r_1|+|\vec r_2|=2a$, отсюда

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a\Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\Rightarrow$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2\Rightarrow$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2\Rightarrow$$

$$xc-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$x^2c^2-2xa^2c+a^4=a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2\Rightarrow$$

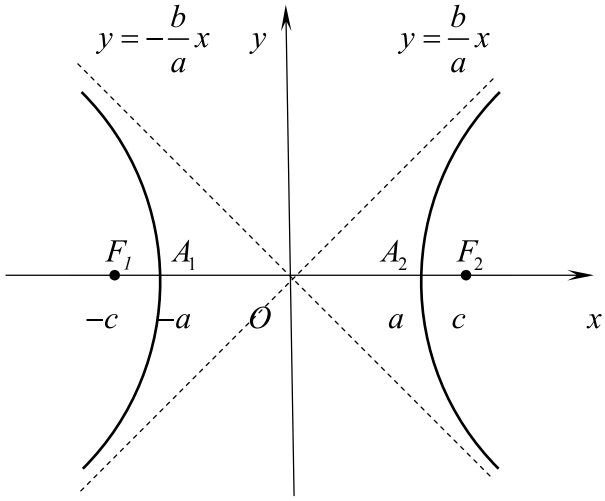
$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$$

Обозначив $a^2 - c^2 = b^2$, получим <u>*каноническое уравнение*</u> эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Эллипс пересекает координатные оси в точках $A_1(-a,0), A_2(a,0)$, $B_1(0,b), B_2(0,-b)$ которые называются <u>*вершинами эллипса*</u>. Отрезки $|A_1A_2| = 2a, |B_1B_2| = 2b$ называются <u>*большой и малой осями*</u> эллипса. Эллипс симметричен относительно осей координат и начала координат. Форму эллипса можно охарактеризовать с помощью <u>*эксцентриситета*</u> $\varepsilon = \frac{c}{a}(0 < \varepsilon < 1)$. Чем больше эксцентриситет, тем более вытянут вдоль оси Ox эллипс. Если $\varepsilon = 0$, то эллипс превращается в окружность.

<u>*Гиперболой*</u> называется множество точек на плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек, называемых <u>*фокусами*</u>, есть величина постоянная (равная $2a$, $a > 0$), меньшая, чем расстояние между фокусами.

Проведем ось Ox через фокусы гиперболы. Начало координат возьмем в середине отрезка F_1F_2. Фокусы имеют координаты $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$.



Пусть точка $M(x,y)$ принадлежит гиперболе, в силу определения гиперболы для фокальных радиус-векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ выполняется $\left||\vec{r}_1| - |\vec{r}_2|\right| = 2a$. Выполним аналогичные преобразования и обозначив $c^2 - a^2 = b^2$, получим <u>*каноническое уравнение гиперболы*</u> $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Гипербола симметрична относительно осей координат и начала координат, состоит из двух веток, которые пересекаются с осью Ox в точках $A_1(-a,0), A_2(a,0)$, которые называются *вершинами гиперболы*. Отрезок $|A_1A_2| = 2a$ называется *вещественной осью*. Точки $B_1(0,b), B_2(0,-b)$ называются *мнимыми вершинами гиперболы*, отрезок $|B_1B_2| = 2b$ называют *мнимой осью*. Форму гиперболы характеризует *эксцентриситет* $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$. Ясно, что $\varepsilon > 1$, причем, чем ближе он к единице, тем сильнее ветви гиперболы прижаты к оси Ox.

Гипербола имеет асимптоты $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

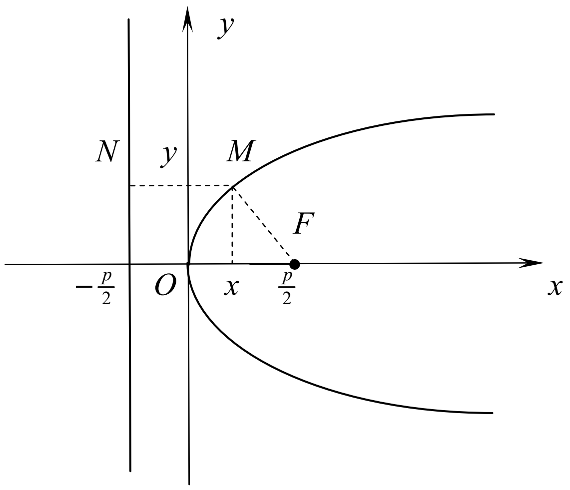
Кривая определяемая уравнением $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ гипербола симметричная относительно оси Ox. Гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$, имеющие общие асимптоты называются *сопряженными*.

Параболой называется множество точек на плоскости, равноудаленных от данной прямой, называемой *директрисой* параболы и от данной точки, называемых *фокусом*.

Проведем ось Ox через фокус перпендикулярно директрисе. Расстояние от директрисы до фокуса обозначим через p и назовем его *параметром параболы*. Начало координат возьмем в середине отрезка, соединяющего фокус с директрисой. Опустим из точки $M(x,y)$ на параболе перпендикуляр на директрису. Пусть его основание точка N, тогда $|\overline{NM}| = |\overline{FM}|$, откуда следует $\left(x + \dfrac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \dfrac{p}{2}\right)^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 2px$.

Имеем *каноническое уравнение* *параболы* $y^2 = 2px$

Парабола симметрична относительно оси Ox и проходит через начало координат.



Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2qy$ и $x^2 = -2qy$ также определяют параболы.

Рассмотренные выше кривые второго порядка имеют канонические уравнения только относительно специально подобранных систем координат. В произвольной системе координат уравнение второго порядка имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

Это *<u>общее уравнение кривой второго порядка</u>*.

Привести его к каноническому виду можно с помощью преобразований координат, причем вид кривой можно определить сразу, вычислив определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Если $\Delta > 0$, то кривая эллиптического типа.

Если $\Delta < 0$, то кривая гиперболического типа.

Если $\Delta = 0$, то кривая параболического типа.

Возможны и другие, так называемые, вырожденные случаи: для эллипса в точку, для гиперболы в пару пересекающихся прямых, для параболы в пару параллельных прямых.

Поворот осей позволяет избавиться от слагаемого, содержащего произведение *xy*, а параллельный перенос от слагаемых, содержащих *x* и *y*.

ТЕМА VI. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Плоскость в трехмерном пространстве

Пусть в пространстве плоскость Q задана точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектором $\vec{n} = (A, B, C)$, перпендикулярным этой плоскости. Выведем уравнение этой плоскости. Возьмем на ней произвольную точку $M(x, y, z)$ и составим вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. При любом расположении точки $M(x, y, z)$ на плоскости Q векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ взаимно перпендикулярны, поэтому их скалярное произведение равно нулю: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$, т.е. $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Это уравнение называется *<u>уравнение плоскости в векторной форме.</u>* Вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ называется *<u>нормальным вектором плоскости</u>*.

Обозначая через $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, запишем уравнение в виде $Ax + By + Cz + D = 0$

Это уравнение называется *<u>общим уравнением плоскости</u>*.

Частные случаи общего уравнения плоскости:

1. Если $D=0$, то уравнение принимает вид $Ax+By+Cz=0$. Этому уравнению удовлетворяет точка $O(0,0,0)$. Плоскость проходит через начало координат.
2. Если $C=0$, то уравнение принимает вид $Ax+By+D=0$. Нормальный вектор $\vec{n}=(A,B,0)$ перпендикулярен оси Oz. Следовательно, плоскость параллельна оси Oz; если $B=0$ — параллельна оси Oy, если $A=0$ — параллельна оси Ox.
3. Если $C=D=0$, то плоскость проходит через $O(0,0,0)$ параллельно оси Oz, т.е. проходит через ось Oz. Аналогично с другими осями.
4. Если $A=B=0$, то уравнение принимает вид $Cz+D=0$ или $z=-\dfrac{D}{C}$. Плоскость параллельна плоскости Oxy. Аналогично с другими плоскостями.
5. Если $A=B=D=0$, то уравнение принимает вид $Cz=0$ или $z=0$. Это уравнение плоскости Oxy. Аналогично с другими плоскостями.

Через три точки пространства, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость. Найдем уравнение плоскости Q, проходящей через точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$. Возьмем произвольную точку $M(x,y,z)$ на плоскости и составим векторы $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1,y-y_1z-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)$. Эти векторы лежат в плоскости Q, следовательно, они компланарны. Запишем условие компланарности трех векторов (смешанное произведение равно нулю): $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$. Т.о. это *<u>уравнение плоскости проходящей через три точки</u>*.

Пусть плоскость отсекает на осях Ox, Oy и Oz соответственно отрезки a,b,c, т.е. проходит через точки $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$. Подставляя координаты точек в предыдущее уравнение, получим

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}=0.$$

Раскрыв определитель, получим $bcx+acy+abz=abc$ или $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ *<u>уравнение плоскости в отрезках</u>*.

Положение плоскости Q полностью определяется единичным вектором $\vec{e}$, имеющим направление перпендикуляра опущенного на плоскость из начала координат, и длиной p этого перпендикуляра.

Пусть α, β, γ — углы, образованные $\vec{e}$ с осями координат. Тогда $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x, y, z)$ и ее радиус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$. Тогда $\text{пр}_{\vec{e}}\vec{r} = p$, т.е. $\vec{r} \cdot \vec{e} = p$ <u>*нормальное уравнение плоскости в векторной форме*</u>. Зная координаты векторов можно записать $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$.

Это уравнение называется <u>*нормальным уравнением плоскости в координатной форме*</u>.

Отметим, что общее уравнение плоскости можно привести к нормальному уравнению умножив обе части уравнения на нормирующий множитель $\lambda = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, где знак берется противоположным знаку свободного члена D общего уравнения плоскости.

Плоскость. Основные задачи

Пусть заданы две плоскости Q_1 и Q_2:

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$,

$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Угол φ между плоскостями это угол между нормалями $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$. Поэтому $\cos\varphi = \dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$ или

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Если плоскости <u>*перпендикулярны*</u>, то перпендикулярны и их нормали, т.е. $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ — условие <u>*перпендикулярности*</u> двух плоскостей.

Если плоскости параллельны, то параллельны и их нормали, т.е.

$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ — условие <u>*параллельности*</u> двух плоскостей.

Пусть задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и плоскость Q своим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Расстояние d от точки до плоскости находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Уравнение прямой в пространстве

Положение прямой в пространстве определено, если задана какая-либо точка $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ на прямой и вектор $\vec{S}=\left(m, n, p\right)$, параллельный этой прямой — направляющий вектор.

Возьмем на прямой произвольную точку $M\left(x, y, z\right)$. Обозначим радиус-векторы точек M_0 и M соответственно $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$. Очевидно, что $\vec{r}=\vec{r}_0+\overrightarrow{M_0 M}$, но $\overrightarrow{M_0 M}=t\vec{S}$, где t — числовой множитель, называемый параметром. Окончательно запишем $\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{S}$. Это уравнение называется <u>*векторным уравнением прямой*</u>.

Замечая, что $\vec{r}=\left(x, y, z\right)$, $\vec{r}_0=\left(x_0, y_0, z_0\right)$, $t\vec{S}=\left(tm, tn, tp\right)$, векторное уравнение прямой можно записать в виде $x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=\left(x_0+tm\right)\vec{i}+\left(y_0+tn\right)\vec{j}+\left(z_0+tp\right)\vec{k}$. Отсюда следуют равенства: $x=x_0+tm$, $y=y_0+tn$, $z=z_0+tp$. Они называются <u>*параметрическими уравнениями прямой*</u>.

Векторы $\overrightarrow{M_0 M}$ и $\vec{S}$ коллинеарные, значит их координаты пропорциональны: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$. Это уравнение называют <u>*каноническим уравнением прямой*</u>.

Замечание. Обращение в ноль одного из знаменателей означает обращение в ноль соответствующего числителя.

Пусть прямая проходит через точки $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$. В качестве направляющего вектора можно взять вектор $\vec{S}=\overrightarrow{M_1 M_2}=\left(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\right)$, следовательно $m=x_2-x_1$, $n=y_2-y_1$, $p=z_2-z_1$. Согласно уравнению, можно записать $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z-z_1}$, <u>*уравнение прямой, проходящей через две точки*</u>.

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей: $\begin{cases} A_1 x+B_1 y+C_1 z+D_1=0 \\ A_2 x+B_2 y+C_2 z+D_2=0 \end{cases}$

Это <u>*общее уравнение прямой*</u>. От него можно перейти к каноническому уравнению. Координаты точки M_0 получаем из системы уравнений, придав одной переменной произвольное значение (например,

$z=0$). Т.к. прямая перпендикулярна векторам $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, то за направляющий вектор можно принять $\vec{n}_1\times\vec{n}_2$.

Замечание. Каноническое уравнение легко получить, взяв две какие-либо точки на ней и применив уравнение прямой, проходящей через две точки.

Прямая в пространстве. Основные задачи

Угол между прямыми это угол между направляющими векторами $\vec{S}_1=(m_1,n_1,p_1)$ и $\vec{S}_2=(m_2,n_2,p_2)$. Поэтому

$$\cos\varphi=\frac{\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2}{\left|\vec{S}_1\right|\cdot\left|\vec{S}_2\right|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Если прямые *перпендикулярны*, то $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

Если прямые *параллельны*, то $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

Прямая $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$ проходит через точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и имеет направляющий вектор $\vec{S}_1=(m_1,n_1,p_1)$.

Прямая $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$ проходит через точку $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и имеет направляющий вектор $\vec{S}_2=(m_2,n_2,p_2)$.

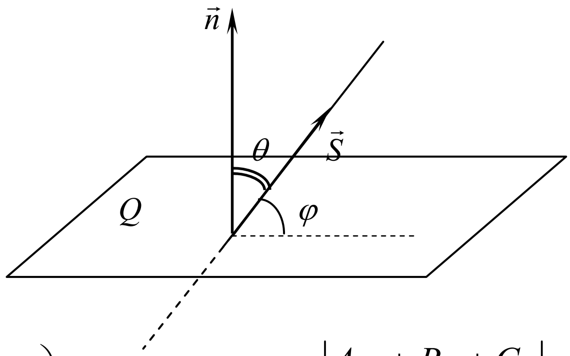
Если $\vec{S}_1\parallel\vec{S}_2$, то прямые параллельны. В противном случае прямые либо пересекаются, либо скрещивающиеся.

Прямые лежат в одной плоскости, если векторы $\vec{S}_1=(m_1,n_1,p_1)$, $\vec{S}_2=(m_2,n_2,p_2)$ и $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ компланарны. Т.е.

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$$ В этом случае прямые пересекаются.

Прямая и плоскость в пространстве. Основные задачи

Плоскость задана уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, а прямая уравнениями $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.



$$\sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta = \frac{\left|Am + Bn + Cp\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Если прямая и плоскость <u>*параллельны,*</u> то векторы $\vec{n}$ и $\vec{S}$ перпендикулярны, т.е. $Am + Bn + Cp = 0$.

Прямая <u>*перпендикулярна*</u> плоскости если векторы $\vec{n}$ и $\vec{S}$ параллельны, поэтому $\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$.

Пусть требуется найти точку пересечения прямой $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ с плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$. Для этого надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p} \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}.$$

Если переписать уравнение прямой в параметрическом виде
$\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$ и подставить эти выражения в уравнение плоскости, получим

$A\left(x_0 + tm\right) + B\left(y_0 + tn\right) + C\left(z_0 + tp\right) + D = 0$ или

$t\left(Am + Bn + Cp\right) + \left(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right) = 0$.

Если прямая не параллельна плоскости, т.е. $Am + Bn + Cp \neq 0$, находим $t = -\dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$. Подставив найденное значение t в параметрические уравнения прямой, найдем координаты точки пересечения прямой и плоскости.

Пример. Найти точку пересечения прямой и плоскости.

$\dfrac{x + 1}{-3} = \dfrac{y + 2}{2} = \dfrac{z - 3}{-2}$, $x + 3y - 5z + 9 = 0$

Запишем параметрические уравнения прямой:

$$\frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-2}=t \Rightarrow \begin{cases} x=-1-3t \\ y=-2+2t \\ z=3-2t \end{cases}$$

Подставляем в уравнение плоскости:

$$(-1-3t)+3(-2+2t)-5(3-2t)+9=0,$$

$$-1-3t-6+6t-15+10t+9=0,$$

$$13t-13=0 \Leftrightarrow t=1$$

Координаты точки пересечения прямой и плоскости будут (-4; 0; 1). ❐

Рассмотрим случай, когда $Am+Bn+Cp=0$:

1. Если $F=Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$, то прямая параллельна плоскости.
2. Если $F=Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, то прямая лежит в плоскости.

Если плоскость и прямая параллельны, становится актуальна задача вычисления расстояния от прямой до плоскости или от точки до плоскости. При этом, первая задача сводиться ко второй, если мы укажем точку на заданной прямой.

Пример. Найти расстояние от точки $A(2, 3, -1)$ до плоскости $7x - 6y - 6z + 42 = 0$.

<u>*Решение*</u>: Расстояние от точки до плоскости определяется по формуле

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|,$$

в которой следует положить $A = 7$; $B = -6$; $C = -6$; $x_1 = 2$; $y_1 = 3$; $z_1 = -1$.

Подставляя эти значения в формулу, будем иметь

$$d=\left|\frac{7\cdot 2+(-6)\cdot 3+(-6)\cdot(-1)+42}{\sqrt{7^2+(-6)^2+(-6)^2}}\right|=\left|\frac{14-18+6+42}{11}\right|=4.$$

Поверхности второго порядка

Поверхность, образованная движением прямой L, сохраняющей постоянное направление, вдоль некоторой кривой K, называется *цилиндрической поверхность* или *цилиндром*.

Кривая K называется *направляющей*, а прямая L — *образующей*.

Пусть кривая K лежит в плоскости Oxy и ее уравнение $F(x,y)=0$, а прямая L параллельна оси Oz.

Название цилиндра определяется названием направляющей: эллиптический (круговой), гиперболический и параболический цилиндр.

Поверхность, образованная прямыми линиями, проходящими через данную точку P и пересекающими данную линию K, называется *конической поверхностью* или *конусом*.

Линия K — *направляющая*, точка P — *вершина*, а прямая, описывающая поверхность — *образующая*.

Канонические уравнения поверхностей второго порядка

Эллипсоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ a>0, b>0, c>0.$$

Исследуем данную поверхность методом сечений. Проведем плоскость параллельную плоскости Oxy. Уравнение такой плоскости $z=h$. Линия, получаемая в сечении, определяется системой уравнения

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ z=h\end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}.$$

- Если $|h|>c$, $c>0$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<0$. Точек пересечения поверхности с плоскостью нет.
- Если $|h|=c$, т.е. $h=\pm c$, то $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}0$. Линия пересечения вырождается в две точки $(0,0,-c)$ и $(0,0,c)$. Плоскости $z=c$ и $z=-c$ касаются данной поверхности.
- Если $|h|<c$, получим уравнение

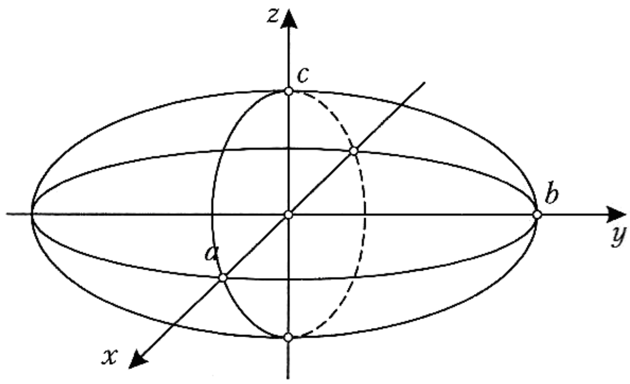
$$\frac{x^2}{\left(a^2\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b^2\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1.$$ Это эллипс с полуосями $a_1=a^2\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ и $b_1=b^2\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$, причем чем меньше $|h|$, тем больше полуоси a_1 и b_1.

Аналогичные результаты получатся при сечении плоскостями $x=h$ и $y=h$.

Данная поверхность симметрична относительно всех трех координатных осей. Координатные оси пересекаются с поверхностью в точках $(\pm a,0,0),(0,\pm b,0),(0,0,\pm c)$. Параметры a,b,c называются <u>*полуосями эллипсоида*</u>.

Если $a=b=c$, то эллипсоид превращается в сферу $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Если любые две полуоси равны, то эллипсоид называется <u>*эллипсоидом вращения*</u>.



<u>*Однополостным гиперболоидом*</u> называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид

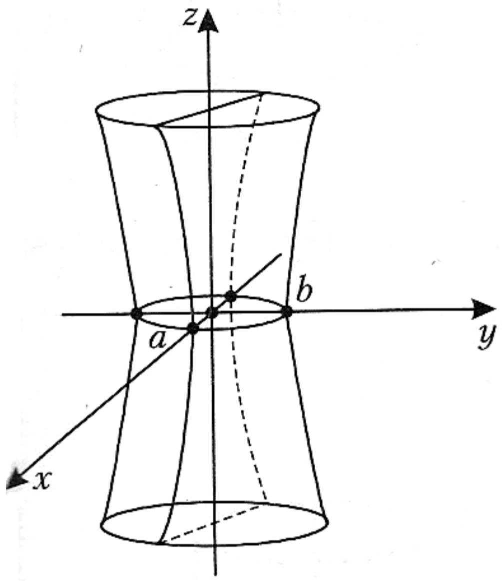
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ a>0,b>0,c>0.$$

Применим метод сечений:

- $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}\Rightarrow\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Это гипербола в плоскости yOz.
- Аналогично в плоскости xOz имеем гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.
- В плоскости xOy имеем эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
- Сечение $z=h$ дает нам эллипс

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1$$ полуоси которого возрастают по мере удаления от начала координат.

- В сечениях параллельных координатным плоскостям yOz и xOz получим гиперболы.



<u>Двуполостным гиперболоидом</u> называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид

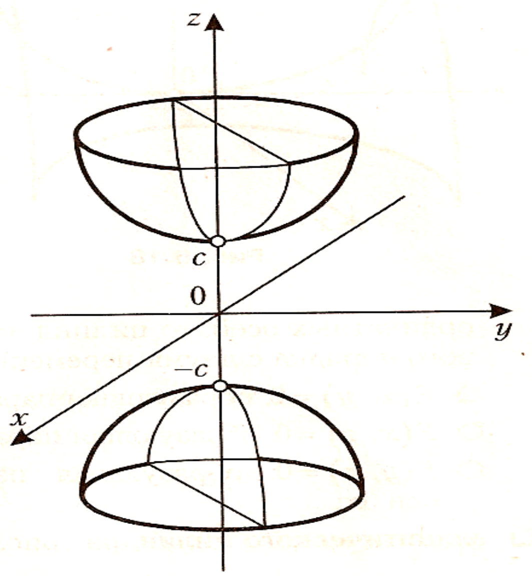
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ a>0,b>0,c>0.$$

Применим метод сечений:

- $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}\Rightarrow -\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$ Это соотношение не имеет смысла, значит поверхность не пересекает плоскость yOz.
- Положим $y=0$ получим в плоскости xOz гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.
- В плоскости xOy имеем гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.
- Сечение $x=h$ дает нам эллипс

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)^2}=1,$$ полуоси которого возрастают по мере удаления от начала координат.

Поверхность вытянута вдоль оси Ox и представляет собой две полости.

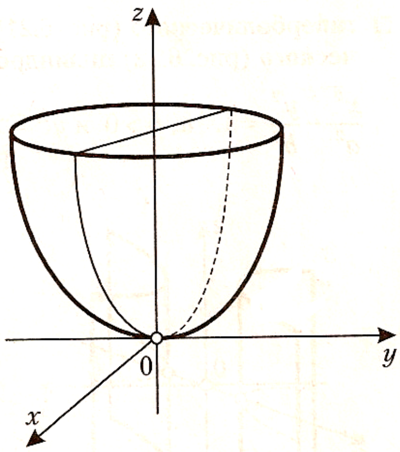


Эллиптическим параболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\ p>0,q>0.$$

- Отметим, что $z>0$ при любых x и y. Причем $z=0$ при $x=0, y=0$. Значит проходит через начало координат и лежит в верхнем полупространстве.
- Сечение, проходящее через ось Oz дает параболу вытянутую вдоль оси Oz: $x^2=2pz, y^2=2qz$.
- Сечение $z=h$ дает эллипс $\frac{x^2}{\left(\sqrt{2ph}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{2qh}\right)^2}=1$.

Поверхность имеет форму чаши. Если $p=q$ поверхность называется *параболоидом вращения*.

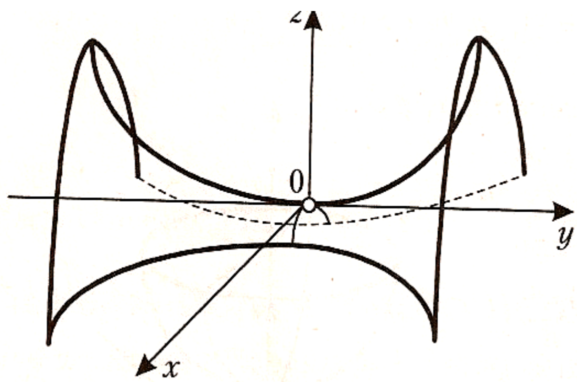


Гиперболическим параболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,\ p>0,\ q>0.$$

- Сечение плоскостью $z=0$ дает пару пересекающихся прямых: $\frac{y}{\sqrt{q}}-\frac{x}{\sqrt{p}}=0,\ \frac{y}{\sqrt{q}}+\frac{x}{\sqrt{p}}=0$. Т.е. поверхность пересекается с xOy по прямым линиям.
- При $x=0$ в плоскости yOz получим параболу $y^2=-2qz$.
- Полагая $x=h$, получим ту же параболу, но приподнятую вверх $y^2=-2qz+\frac{qh^2}{p}$.
- В плоскости xOz имеем параболу $x^2=2pz$

Поверхность имеет форму седла.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник. – М.: Высшая школа, 1998.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной и аналитической геометрии: Учебник для вузов. – Ростов-на-Дону: Феникс, 1997.
3. Высшая математика для экономистов: Учебник / Под ред. Проф. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд. – М.: Банки и биржи; ЮНИТИ, 2004.
4. Клюшин В.Л. Высшая математика для экономистов: Учебное пособие. – М.: ИНФРА-М, 2006.
5. Коробов П.Н. Математическое программирование и моделирование экономических процессов: Учебник. СПб.: ООО «Издательство ДНК», 2003.
6. Красс М.С. Математика для экономических специальностей: Учебник. – М.: ИНФРА-М, 1999.
7. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник / Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2003.
8. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие / Под ред. В.И. Ермакова. – 2-е изд., испр. – М.: ИНФРА-М, 2007.
9. Справочник по математике для экономистов: Учебное пособие / Под ред. В.И. Ермакова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: ИНФРА-М, 2007.

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики (ВМ) была организована в 1931 году. Первым заведующим кафедрой был профессор Г.Д. Гродский. С конца 1936 года кафедрой ВМ заведовал профессор И.П. Натансон, известный специалист по теории функций действительной переменной. В 1944 году заведующим кафедрой ВМ становится профессор В.А. Тартаковский (1901-1973), замечательный математик и педагог. Владимир Абрамович Тартаковский является одним из крупнейших советских алгебраистов. Им получены пользующиеся мировой известностью результаты по проблеме тождества в теории бесконечных групп. Известность получили также его работы по использованию теоретико-числовых методов в теории изгибания поверхностей, теории диофантовых уравнений.

Обладая исключительной энергией, В.А. Тартаковский уделял много внимания научной и общественной работе. Ещё в тридцатые годы он в составе комиссии Наркомпроса участвовал в разработке программы по математике для средней школы. В течение долгого времени был членом президиума учебно-методического совета при Министерстве высшего и среднего специального образования СССР, входил в комиссию по реформе математического образования в стране. Был одним из инициаторов проведения среди школьников Ленинграда первой математической олимпиады. В.А. Тартаковский участвовал в организации Ленинградского отделения математического института им. В.А. Стеклова и был первым его директором.

В разное время на кафедре ВМ преподавали академик В.И. Смирнов, член-корреспонпент АН СССР Д.К. Фаддеев, проф. И.С. Соминский, проф. Ф.И. Харшиладзе, проф. А.Ф. Андреев, проф. Ю.В. Аленицын, проф. И.А.

Молотков. В 1979 году кафедру возглавил доктор технических наук, профессор В.Г. Дегтярёв, специалист по теории устойчивости и теории движения космических аппаратов. С 1997 года кафедрой руководит доктор физико-математических наук, профессор И.Ю. Попов, в область научных интересов которого входят теория рассеяния, теория операторов, моделирование сложных физических систем.

Кафедра ВМ осуществляет обучение студентов всех специальностей университета по дисциплине “Высшая математика” и читает ряд специальных дисциплин математического цикла. Кафедра ведет подготовку бакалавров и магистров по направлению “Прикладная математика и информатика”. Кафедра ВМ является самой большой кафедрой в университете по числу преподавателей. Среди её сотрудников 8 докторов и 19 кандидатов наук. Преподаватели кафедры активно участвуют как в фундаментальных исследованиях по математике и теоретической физике, так и в прикладных научно-технических исследованиях, принимают активное участие в работе российских и международных научных конференций, выступают с докладами и преподают за рубежом. За последние 5 лет сотрудниками кафедры опубликовано более 300 работ в отечественных и зарубежных научных изданиях. Областью научных интересов профессора А.Г.Петрашеня является теория взаимодействия излучения с веществом, оптика и спектроскопия. Профессор В.П. Смирнов – специалист по теории твёрдого тела и применению теории групп в квантовой механике. Профессор Жук В.В. – один из ведущих в мире ученых в области дифференциальных уравнений. Профессор В.Ю. Тертычный занимается теорией оптимального управления механическими системами. Профессор Уздин В.М. является известным специалистом в физике магнитных наносистем. Профессор Мирошниченко Г.П. активно занимается изучением взаимодействия излучения с веществом. Область научных интересов профессора Качалова А.П. – современные методы теории дифракции.

Светлана Николаевна Кузнецова
Марина Владимировна Лукина

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
для студентов экономических специальностей
I курс (модуль 1–2)

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В авторской редакции
Дизайн М.В. Лукина
Верстка М.В. Лукина
П.С. Сидорова
Редакционно-издательский отдел Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99
Подписано к печати 02.06.10.
Заказ №
Тираж 200
Отпечатано на ризографе